Difficoltà in matematica

sostegno e insegnamento individualizzato

Ricerca internazionale
Ricerca italiana
Processi di apprendimento

Didattica
Processi di insegnamento
Strumenti applicativi

4/1
ottobre 2007

Ed. Erickson – CP 792 Trento – Semestrale – Poste Italiane s.p.a. – Spedizione in Abbonamento Postale – D.L. 353/2003
(conv. in L. 27/02/2004 n° 46) art.1, comma 1, DCB Trento. Supplemento n. 1 al periodico «Difficoltà di Apprendimento» n. 13/1.

Erickson

Lo sviluppo delle capacità aritmetiche

BRIAN BUTTERWORTH
Institute of Cognitive Neuroscience, University College, London

SOMMARIO

Lo sviluppo delle abilità aritmetiche viene descritto in termini di una comprensione sempre più sofisticata della numerosità e delle sue implicazioni e di una crescente abilità nel manipolare numerosità. Il concetto di numerosità sembra essere innato nel bambino, dato che anche i neonati, perfino nella prima settimana di vita, mostrano di distinguere gli stimoli visivi in base a tale aspetto. Il deficit nella capacità di apprendere l'aritmetica — la discalculia — può essere interpretato in molti casi come deficit nel concetto di numerosità da parte del bambino. Vengono inoltre discusse le basi neuroanatomiche dello sviluppo delle abilità aritmetiche.

Un bambino, alla nascita, è un candidato all'umanità; non può diventare umano da solo. (Pieron, 1959)

La numerosità come base dell'aritmetica

Nella nostra società permeata dai numeri, il bambino che acquisisce abilità aritmetiche si imbatte in una varietà di strumenti culturali specifici a questo riguardo. I più ovvi sono le espressioni numeriche: parole-numero (uno, due, ventidue, milione, ecc.), numeri arabi (1, 2, 22, 1.000.000, ecc.), numeri romani, configurazioni sui dadi, sulle carte da gioco e sulle tessere del domino. Altri sono relativamente astratti: i fatti aritmetici (5 x 3 = 15), procedure aritmetiche (prestito, riporto), leggi aritmetiche (a + b = b + a; se a – b = c allora a = b + c e così via). Le abilità che il bambino deve acquisire sono, tra le altre, quelle di leggere e scrivere numeri, contare oggetti in un insieme, calcolare attraverso le quattro principali operazioni aritmetiche, applicare queste abilità in compiti sul denaro, dire orari e date, trovare una certa pagina in un libro, selezionare un canale televisivo, ecc. Tutte queste abilità sono assai più complesse e sottili di quanto possano apparire di primo acchito a un adulto competente. La domanda alla quale cerchiamo di rispondere in questo articolo è la seguente: il processo di acquisizione di tali strumenti aritmetici è supportato soltanto da capacità cognitive generali — come il ragionamento, la memoria (a breve e lungo termine), il senso dello spazio — oppure abbiamo delle capacità numeriche innate?

Il bambino che acquisisce abilità numeriche probabilmente non è aiutato dal fatto che un'espressione numerica non ha un unico significato. Ad esempio, «quattro» (o 4) può essere il nome di un canale televisivo — un significante assolutamente arbitrario, esattamente come i nomi propri e comuni —, ma può anche essere un numero di pagina, parte di una sequenza familiare stabile, che viene subito dopo pagina 3 e subito prima di pagina 5. I numeri vengono usati anche per indicare quantità analoghe continue, come «4,6 grammi». Questi usi non sono esclusivi delle espressioni numeriche: i canali televisivi possono essere indicati con parole o acronimi (ad esempio All Music, MTV), le lettere dell'alfabeto formano una sequenza familiare fissa, e altre espressioni di quantità (unità di lunghezza, peso, ecc.) vengono utilizzate da millenni (per una trattazione più dettagliata delle situazioni in cui vengono utilizzate espressioni numeriche si veda Fuson, 1988.)

Il significato distintivo delle espressioni numeriche è denotare un numero di oggetti presenti in un insieme, cioè la numerosità di un insieme (il termine «numerosità» viene qui utilizzato come equivalente cognitivo del termine «cardinalità» usato in matematica e in logica). È questa la particolarità speciale dei numeri. Implica che la numerosità è astratta: non è un oggetto fisico né la caratteristica di un oggetto (come il colore o la forma), ma è piuttosto una proprietà di un insieme che può essere composto da qualsiasi cosa: oggetti concreti, suoni o oggetti astratti (come i tre desideri). Ciò non fa della numerosità una finzione misteriosa o utilitaristica (Giaquinto, 2001), ma significa che la nostra comprensione di particolari numerosità potrebbe dipendere dalla natura degli insiemi. Ad esempio, la numerosità di una configurazione familiare di pallini, come quelle presenti sulle facce dei dadi, è più facile da cogliere rispetto allo stesso insieme di pallini sparso casualmente, e il riconoscimento di queste numerosità diventa tanto più complesso quanto più aumenta il numero di pallini (Mandler e Shebo,1982). L'idea di numerosità comporta varie conseguenze note, come quella per cui due insiemi hanno la stessa numerosità se e soltanto se i componenti di ciascuno possono essere messi in corrispondenza biunivoca senza che ne avanzi alcuno. In termini generali, un bambino possiede il concetto di numerosità se:

- comprende il principio di corrispondenza uno a uno;
- comprende che gli insiemi di oggetti hanno una numerosità, che alcune manipolazioni di questi insiemi influiscono sulla numerosità (ad esempio combinare

insiemi, togliere sottoinsiemi, ecc.) e che un insieme può avere la stessa numerosità di un altro oppure una numerosità maggiore o minore;
- comprende che gli insiemi sono composti di elementi non necessariamente visibili: possono essere formati da elementi udibili, tattili o astratti (come i desideri);
- è in grado di riconoscere piccole numerosità (insiemi composti di circa quattro elementi) senza contarle verbalmente (Butterworth, 1999).

Ora il bambino deve stabilire se un'espressione numerica sia utilizzata come denominazione, per individuare un oggetto in una sequenza, per indicare una quantità di materiale oppure come numerosità definita.

Le consuete operazioni aritmetiche dell'addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione possono essere definite in termini di operazioni su insiemi e sulla loro numerosità, e questo è il modo in cui di norma le concepiamo. La somma di un'addizione, ad esempio, può essere concepita come la numerosità dell'unione di due o più insiemi disgiunti; similmente, sottrazione, moltiplicazione e divisione possono essere concepite in termini di risultati di operazioni su insiemi (Giaquinto, 1995). Nei curricoli formali, moltiplicazione, divisione e frazioni generalmente seguono l'addizione e la sottrazione, e vengono spiegate attraverso tali operazioni. Ad esempio, nel Regno Unito il programma di matematica inizia nel periodo prescolare (4-5 anni) e nella prima classe primaria (5-6 anni) con il contare, il sommare e il sottrarre; poi in seconda viene introdotta «l'operazione della moltiplicazione come addizione ripetuta o come descrizione [ad esempio, attraverso il conteggio] di una serie» (DfEE, 1999, Key Objectives, p. 3); le tabelline vengono insegnate fino in quinta. Le frazioni sono presentate in terza e la divisione, come complemento della moltiplicazione, in quarta.

Questa rassegna si concentra su conteggio, addizione e sottrazione, poiché questi sono i temi dei quali la ricerca si occupa maggiormente e poiché costituiscono la base pedagogica e in larga misura la base concettuale di altri aspetti dell'aritmetica. Tuttavia, moltiplicazione, divisione e frazioni implicano concetti che non possono essere prontamente derivati da quello di numerosità. Ne parleremo ancora più avanti.

Una delle questioni maggiormente discusse è se il bambino comprenda il particolare significato della numerosità grazie a una specifica capacità innata oppure tramite una capacità più generale di percepire e manipolare quantità. Dati essenziali vengono forniti dalle persone che mostrano un deficit selettivo in questa capacità, che influisce profondamente sulla loro possibilità di apprendere l'aritmetica. Tale condizione è nota come «discalculia» e viene discussa ampiamente più avanti.

Benché sia ampiamente riconosciuto che il possesso di qualcosa di simile al concetto di numerosità sia necessario per una normale competenza aritmetica, non vi è alcun accordo riguardo a come le persone pervengano ad esso. Secondo Piaget (1952), le condizioni prerequisite sono il possesso di alcuni principi logici, dal momento che l'aritmetica è di fatto una parte della logica:

> La nostra ipotesi è che la costruzione del numero vada di pari passo con lo sviluppo della logica, e che il periodo prenumerico corrisponda a un livello prelogico. Infatti, i nostri risultati mostrano che il numero viene organizzato, stadio dopo stadio, in stretta connessione con la graduale elaborazione di sistemi di inclusione (gerarchia delle classi logiche) e di sistemi di relazioni asimmetriche (seriazioni qualitative), per cui la sequenza di numeri nasce da una sintesi operatoria di classificazione e seriazione. È nostro parere che le operazioni logiche e aritmetiche costituiscano perciò un unico sistema psicologicamente naturale, nel quale le operazioni aritmetiche derivano da una generalizzazione e fusione di quelle logiche, sotto le due categorie complementari di inclusione in classi e seriazione di relazioni, a prescindere dalla qualità. (Piaget, 1952, p. viii)

Perciò, per Piaget, l'idea di numerosità si costruisce su capacità più basilari, tra le quali la capacità di ragionare in termini transitivi (cioè, il bambino dovrebbe essere in grado di ragionare sul fatto che se A è maggiore di B, e B è maggiore di C, allora A è maggiore di C), senza la quale il bambino non sarebbe in grado di ordinare i numeri per grandezza, il che è chiaramente fondamentale. Una seconda competenza che il bambino deve sviluppare è la consapevolezza che il numero di elementi in un insieme si «conserva», per usare il suo termine tecnico, a meno che all'insieme non venga aggiunto o sottratto un oggetto. Il semplice fatto di spostare gli oggetti — ad esempio, sparpagliandoli così che occupino più spazio — non influisce sul loro numero. Ancora più basilare di queste due capacità, come evidenzia Piaget, è quella di astrarre rispetto alle proprietà percettive degli elementi di un insieme: per coglierne la numerosità è necessario ignorare tutte le caratteristiche degli oggetti che lo compongono, come il colore, la forma, le dimensioni e perfino cosa sono; un insieme di tre gatti ha la stessa numerosità di un insieme di tre sedie o di tre desideri. L'idea di numero è astratta. E le idee di «numero uguale» o «numeri diversi» sono astrazioni su astrazioni. L'emergere della capacità di cogliere le numerosità dipende dallo sviluppo delle necessarie capacità di base, quelle che i piagetiani chiamano «prerequisiti», e dipende anche, come molte capacità concettuali e logiche, dall'interazione con il mondo. Il concetto di numerosità può emergere come esito della manipolazione di oggetti: ad esempio, allineare insiemi per stabilire la corrispondenza biunivoca tra i componenti di due insiemi, per distribuire caramelle o giocattoli.

Alcuni autori hanno suggerito che per l'acquisizione delle abilità aritmetiche sono necessarie, o perlomeno molto importanti, anche capacità cognitive non specifiche per i numeri, come la memoria di lavoro (Ashcraft, Donley, Halas e Vakali, 1992; Hulme e Mackenzie, 1992), la cognizione spaziale (Rourke, 1993) e il linguaggio (Bloom, 1994; Carey e Spelke, in stampa). Le correlazioni tra queste abilità cognitive e i test standardizzati sull'aritmetica sono ben stabilite. Ad esempio, Bull e Johnston (1997) hanno rilevato una correlazione di –.54 tra una misura di competenza linguistica (latenze nella denominazione) e il rendimento in matematica. Tuttavia, non è affatto chiaro come funzioni la relazione causale: una buona competenza aritmetica aiuta nei compiti di memoria di lavoro, spaziali o linguistici? Esiste un fattore comune alla base di tutti questi compiti? Le relazioni causali possono essere esplorate sistematicamente nei bambini con deficit specifici nell'apprendimento dell'aritmetica e nelle capacità cognitive che presumibilmente sottendono ad esso.

Capacità dei bambini piccoli

Contrariamente a quanto proposto da Piaget e altri autori, i bambini piccoli sembrano reagire alle proprietà numeriche del loro mondo visivo, pur senza potersi avvalere del linguaggio, del ragionamento astratto o di particolari opportunità di manipolare il loro ambiente.

Riconoscimento e manipolazione di numerosità

In uno studio pionieristico, Starkey e Cooper (1980) hanno mostrato, usando un paradigma di «abituazione/disabituazione», come alcuni bambini di 4-6 mesi fossero sensibili alla numerosità di una serie di pallini neri. Ai bambini piccoli piacciono le novità e osservano più a lungo le cose nuove. La presentazione ripetuta della stessa cosa li porta ad abituarsi e a perdere interesse, mentre la presentazione di una cosa nuova li fa riacquistare interesse, li fa disabituare. In questo studio i bambini si disabituavano a un nuovo numero di pallini (fino a quattro). Naturalmente, con ogni cambiamento di numerosità, cambiavano anche altri aspetti dello stimolo, come la quantità globale di superficie nera, l'estensione complessiva del gruppo di pallini e forse la frequenza spaziale. Starkey e Cooper hanno cercato di controllare questa variabile modificando in ogni prova la disposizione dei pallini di abituazione e assicurandosi che gli stimoli di disabituazione coprissero la stessa estensione.

In uno studio con bambini di 6-8 mesi, Starkey, Spelke e Gelman (1990) hanno utilizzato immagini di oggetti, come un'arancia, un portachiavi, un paio di occhiali da sole, un guanto e così via. Anziché alternare due carte con i pallini, di cui una con due pallini vicini e l'altra con due pallini lontani, ogni carta presentava due oggetti, ogni volta diversi. Perciò, ogni carta con lo stesso numero di oggetti presentava sempre immagini nuove. Anche la carta di disabituazione presentava immagini nuove, ma questa volta ne mostrava tre invece che due. Poiché ogni carta era nuova per il bambino, questi avrebbe categorizzato mentalmente le carte di abituazione come aventi due oggetti, così che, presentandogli una carta con tre immagini, avrebbe riacquistato interesse e guardato più a lungo? Se guardava più a lungo, non poteva essere solo per la novità, dato che tutte le carte erano diverse e quindi nuove. Si è rilevato che i bambini guardavano significativamente più a lungo le carte con tre immagini; di nuovo, perciò, sembravano essere sensibili al numero di figure sulla carta. Questo significa che categorizzavano quello che vedevano in un modo del tutto astratto: le caratteristiche particolari di ogni immagine (i colori, gli oggetti rappresentati, la dimensione, ecc.), che cambiavano a ogni carta, dovevano essere ignorate.

Risultati simili sono stati riscontrati con neonati alla prima settimana di vita (Antell e Keating, 1983). Van Loosbroek e Smitsman (1990) hanno mostrato a un gruppo di bambini di 5 e 13 mesi 2, 3 o 4 rettangoli, di varie sfumature di grigio, che si muovevano secondo traiettorie casuali sul monitor di un computer. Di quando in quando un rettangolo passava davanti a un altro, nascondendolo parzialmente. Come negli studi precedenti, dopo un po' di tempo i bambini guardavano meno il monitor, ma quando il numero di rettangoli cambiava, aumentando o diminuendo di uno, ricominciavano a guardare significativamente di più. Non è possibile che reagissero a un cambiamento nella configurazione, dato che ognuno dei rettangoli si muoveva costantemente, perciò necessariamente i bambini dovevano avere ricavato la numerosità dei rettangoli presentati. Inoltre, i bambini non soltanto sembravano riconoscere le piccole numerosità, fino a circa 4, ma parevano anche avere un qualche senso della loro grandezza relativa. Brannon (2002) ha mostrato a dei bambini di 11 mesi una sequenza di configurazioni composte da un numero crescente di pallini, e quindi una sequenza di valutazione. Se questa sequenza aveva un numero decrescente di pallini, il bambino guardava per un tempo circa due volte maggiore rispetto a quando il numero era crescente. Tuttavia, questa reazione non è stata riscontrata nei bambini di due mesi più piccoli. Nonostante queste dimostrazioni della sensibilità dei bambini piccoli alla numerosità, alcuni studi hanno cercato di mostrare che essi reagiscono a quantità continue piuttosto che a numerosità. Sicuramente, quando le quantità continue vengono poste in antagonismo, anziché controllate o randomizzate, esse si rivelano uno stimolo più potente (Feigenson, Spelke e Carey, 2002; Mix, Huttenlocher e Levine, 2002). Tuttavia, una ricerca che ha utilizzato gruppi di pallini in movimento, nei quali la quantità continua di area disegnata e il profilo delle configurazioni erano strettamente controllati, ha mostrato che i bambini rispondono alla numerosità (Wynn, Bloom e Chiang, 2002). Naturalmente, non c'è ragione per cui i bambini piccoli non dovrebbero avere sistemi cerebrali per elaborare entrambi i tipi di stimoli. Normalmente, l'ambiente li combina — più oggetti occupano solitamente più spazio — per cui gli output dei due sistemi sono coerenti, così che l'uso della quantità continua potrebbe essere un indice efficace della numerosità. Il modo di risolvere queste differenze viene poi modificato dalla successiva esperienza del mondo e dall'enfasi sull'importanza del numero.

Il concetto di numerosità dei bambini piccoli ha un tetto massimo? Il bambino piccolo può enumerare 4, 10, o 100? Tre sembra essere il limite massimo: sebbene i bambini partecipanti allo studio di Starkey e Cooper (1980) distinguessero il 4 dal 3, è possibile che per loro il 4 rappresentasse solo «più di 3». Tuttavia, non possiamo essere certi che il limite riguardi l'idea di numerosità che il bambino possiede anziché la sua capacità di percepire e ricordare quanto ha percepito. La consapevolezza del fatto che la numerosità è infinita sembra dipendere dalla consapevolezza che è sempre possibile aggiungere uno. Perciò, il limite del bambino potrebbe riguardare la sua capacità di effettuare addizioni successive e la catena di ragionamento necessaria per passare da questo all'idea che i numeri sono infiniti. Il limite più probabile è quello della capacità di cogliere di primo acchito la numerosità di una serie di oggetti, senza contarli, limite che, anche negli adulti, corrisponde all'incirca a quattro. Questo sembra essere un processo specializzato della percezione visiva, generalmente definito «subitizing» (Mandler e Shebo, 1982). Dehaene e Changeux (1993) hanno creato un modello informatico di tale processo, che in modo molto semplice ed efficace estrae il numero di oggetti da una configurazione visiva, ignorandone le dimensioni, la forma o la posizione. Si è tentati di immaginare che nel sistema di elaborazione visiva del cervello del bambino piccolo ci sia qualcosa di simile; per le numerosità oltre il 4, i bambini si disabituano quando c'è un rapporto 2 a 1 (ad esempio 8:16) ma non quando c'è un rapporto 2 a 3 (8:12) (Xu e Spelke, 2000).

Possedere un concetto di numerosità non significa soltanto essere in grado di stabilire se due insiemi abbiano o meno la stessa numerosità: implica anche una capacità di rilevare il cambiamento di numerosità quando all'insieme vengono aggiunti o sottratti elementi, cioè una capacità di calcolare le conseguenze aritmetiche dell'addizione e della sottrazione. Wynn (1992) ha dimostrato che i bambini piccoli hanno questa capacità, utilizzando il fatto che i bambini piccoli guardano più a lungo gli eventi che non corrispondono alle loro aspettative. A un gruppo di bambini di 4-5 mesi veniva mostrato un pupazzo in un teatrino; il teatrino veniva poi coperto con uno schermo, dietro il quale veniva posto un secondo pupazzo. Il bambino non poteva vedere i pupazzi e doveva immaginare la situazione dietro lo schermo. Se calcolava che un pupazzo più un altro pupazzo fa due pupazzi, la sua aspettativa aritmetica era che dietro lo schermo ci dovevano essere due pupazzi. Wynn ha rilevato che, quando lo schermo veniva rimosso, i bambini guardavano più a lungo se nel teatrino c'era un pupazzo solo o ce n'erano tre che non se ce n'erano due. Similmente, quando nel teatrino venivano messi due pupazzi, poi veniva coperto con lo schermo e lo sperimentatore toglieva uno dei pupazzi, facendosi vedere dai bambini, questi si aspettavano che ne rimanesse uno e guardavano più a lungo se nel teatrino ne vedevano poi un numero diverso.

Questo esperimento è stato replicato diverse volte e Simon, Hespos e Rochat (1995) hanno dimostrato che i bambini di 3-5 mesi guardano più a lungo quando il numero di pupazzi è inatteso rispetto a quando il tipo di pupazzo è inatteso (cioè uno dei pupazzi viene sostituito, di nascosto, con un altro pupazzo diverso). Ci sono anche dati che indicano che i bambini piccoli reagiscono alla numerosità e non alla posizione (Koechlin, Naccache, Block e Dehaene, 1999).

Questi studi non sono stati esenti da critiche: non sempre si è riusciti a replicarli (Wakeley, Rivera e Langer, 2000) e sono state avanzate spiegazioni alternative connesse alla familiarità degli oggetti mostrati (Cohen e Marks, 2002). Wynn ha risposto a entrambe le critiche, evidenziando differenze nella procedura sperimentale che avrebbero potuto condurre a risultati diversi (Wynn, 2000; 2002).

In modo più radicale, Carey, Spelke e collaboratori hanno suggerito che le operazioni mentali che sembrano coinvolgere la numerosità possono di fatto essere spiegate attraverso due processi essenzialmente non numerici. Primo, c'è un sistema di tracking di oggetti che è necessario in ogni caso per mantenere l'attenzione su un numero di elementi fino a quattro presenti nell'ambiente. Gli studi che mostrano che i bambini piccoli rispondono ai cambiamenti di numero o ai cambiamenti rispetto al numero atteso vengono spiegati in termini di differenze di stato nel sistema di tracking di oggetti. Secondo, c'è un sistema per rappresentare e confrontare quantità continue (Carey e Spelke, in stampa). Nell'esperimento di Xu e Spelke (2000) descritto sopra, la differenza di risposta tra il rapporto minimo per la discriminazione di numeri piccoli (2 a 3) e la discriminazione di numeri grandi (1 a 2) viene spiegata con il passaggio dal sistema di tracking di oggetti al sistema di quantità continue. (Secondo questa ipotesi, la comprensione di numerosità esatte superiori a 4 dipende dall'acquisizione delle parole-numero.) Tuttavia, i dati attualmente a disposizione tendono a indicare che i bambini piccoli sono in grado di rappresentarsi la numerosità di insiemi di oggetti e di eseguire manipolazioni mentali su tali rappresentazioni.

Lo sviluppo del conteggio

Uno dei primi e forse il più importante contatto tra il senso del numero del bambino e gli strumenti concettuali forniti dalla culturale è il contare. Molte filastrocche contengono conte o parole-conta («Un, due, tre la Peppina fa il caffè», «Un, due, tre, una volta c'era un re…») e perfino i titoli di alcune fiabe contengono parole-numero *(Biancaneve e i sette nani, I tre porcellini).* Contare è un'abilità complessa che implica l'apprendimento delle parole-conta nell'ordine corretto, la coordinazione tra la produzione di parole-conta e l'identificazione di oggetti nell'insieme da contare, e la capacità di contare ogni oggetto una sola volta. Inoltre, il bambino deve comprendere che il processo di contare può fornire il numero di oggetti presenti nell'insieme.

Nel suo *Saggio sull'intelligenza umana,* il filosofo John Locke riconosceva che le parole-conta sono utili per tenere a mente grandi numerosità distinte: «Alcuni americani con i quali ho parlato (i quali erano altrimenti di intelletto pronto e razionale) non erano in alcun modo in grado, come noi facciamo, di contare fino a 1000; né avevano un'idea chiara di quel numero, benché fossero in grado di contare molto bene fino a 20». Questi americani, i Tupinambos della giungla brasiliana, «non avevano i nomi per i numeri oltre il 5». Secondo Locke, l'uomo costruisce il concetto di ciascun numero a partire dal concetto di «uno» («il concetto più universale che abbiamo»). Ripetendo «questa idea nelle nostre menti e insieme le ripetizioni [...] aggiungendo [l'idea di] uno a [l'idea di] uno abbiamo l'idea complessa di un paio». Il filosofo riteneva che i nomi dei numeri fossero essenziali per acquisire idee esatte dei numeri grandi e che il sistema di parole-numero conducesse «a contare bene». Secondo Locke, perciò, è possibile avere i concetti basilari di numerosità senza l'aiuto della cultura, ma la cultura può essere utile in alcune circostanze.

Naturalmente, nel trarre le sue conclusioni Locke si basava su osservazioni casuali più che su uno studio sistematico, e sarebbe senz'altro estremamente interessante utilizzare i metodi attuali per verificare la sua ipotesi studiando bambini cresciuti presso culture prive delle parole per i numeri superiori a 5. Qualcuna di queste culture esiste ancora, in Amazzonia, nella Nuova Guinea e in Australia, dove poche delle lingue aborigene hanno parole-numero superiori al tre, parole che sono peraltro prestiti da altre lingue (Dixon, 1980).

L'apprendimento delle parole-conta

Contare è il primo ponte tra le competenze innate del bambino rispetto alla numerosità e le conoscenze matematiche più elaborate possedute dalla cultura in cui è nato. Anche la meno matematica delle culture permette ai suoi componenti di andare ben oltre le competenze infantili. Permette di tenere traccia di numerosità molto elevate attraverso il conteggio con parole-numero o i nomi di parti del corpo, di fare calcoli aritmetici più complessi dell'aggiungere o sottrarre uno da piccole numerosità, calcoli necessari per il commercio o gli scambi rituali. Benché a noi adulti possa apparire molto semplice, imparare a contare richiede circa quattro anni, dall'età di 2 a quella di 6. I bambini iniziano a contare verso i 2 anni e progrediscono per vari stadi fino all'età di 6, quando raggiungono una comprensione simile a quella degli adulti riguardo a come si conta e a come si usa questa conoscenza.

Gelman e Gallistel (1978) hanno identificato le abilità, che essi chiamano «principi», necessarie per saper contare. Consideriamo l'esempio di un bambino che conta cinque dinosauri:

– deve conoscere le parole-numero da «uno» a «cinque» o, più propriamente, deve conoscere cinque parole-numero che vanno tenute sempre nello stesso ordine (principio dell'ordine stabile);
– ognuna di queste parole deve essere associata a un solo oggetto: nessuna parola-numero deve essere usata più di una volta e tutti gli oggetti devono essere contati. In altre parole, ogni oggetto va messo in corrispondenza biunivoca con le parole-numero (principio dell'uno a uno);

– il bambino deve essere in grado di indicare il numero di dinosauri con l'ultima parola-numero che ha usato: «Uno, due, tre, quattro, cinque. Cinque dinosauri» (principio della cardinalità).

Gelman e Gallistel (1978) hanno proposto due ulteriori principi: l'astrattezza, che significa che tutto può essere contato, e l'irrilevanza dell'ordine, che significa che si può iniziare a contare da qualsiasi elemento dell'insieme. È chiaro che la conoscenza di tali principi deriva dalla comprensione del concetto di numerosità. Gli insiemi non hanno un ordine intrinseco e capire questo significa conoscere il principio di irrilevanza dell'ordine. Inoltre, non vi è alcun limite riguardo al tipo di cose che possono costituire un insieme, purché sia possibile individuarle. Esserne consapevoli implica possedere il principio di astrattezza. Naturalmente, bambini e adulti possono possedere il concetto di numerosità senza comprenderlo pienamente e senza ricavarne tutti i principi che logicamente ne conseguono.

Imparare la sequenza di parole-conta è la prima di queste abilità a essere padroneggiata. A circa 2 anni e mezzo i bambini sembrano sapere cos'è una parola-numero ed è raro che introducano nella sequenza di conteggio parole estranee ad essa, anche quando l'ordine della sequenza è scorretto (Fuson, 1988, capitolo 10).

Anche imparare la sequenza di parole-numero non è così semplice come potrebbe sembrare. I bambini di 2 o 3 anni spesso credono che le prime parole-numero siano una parola sola «unoduetrequattrocinque» e ci vuole del tempo perché apprendano che questa parola lunga è in realtà un gruppo di cinque parole corte (Fuson, 1992). Gelman e Gallistel (1978) hanno osservato un bambino di 3 anni e mezzo che cercava di contare otto oggetti, rilevando come la produzione della sequenza corretta sia una fase difficile: «Uno, due, tre, quattro, otto, dieci, untici», «No, riprova», «Uno, due, tre, quattro, cinque, dieci, untici», «No, riprova», «Uno! Due! Treeee, quattro, cinque, dieci, untici», «No»; e alla fine, dopo numerosi tentativi: «Uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, undici! Uh!». La corrispondenza biunivoca emerge all'età di circa 2 anni, in maniera del tutto indipendente rispetto all'apprendimento della sequenza di parole-conta. A 2 anni, i bambini sono in grado di dare una caramella a ciascuno, di mettere una tazza su ogni piattino e di nominare, o indicare, ogni persona in una stanza o in una fotografia, una volta e soltanto una (Potter e Levy, 1968). Mostrando un pupazzo «che non è molto bravo a contare» e che conta due volte lo stesso oggetto o lo salta nel conteggio, i bambini di 3 anni e mezzo sono molto pronti a individuare queste violazioni della corrispondenza biunivoca (Gelman e Meck, 1983). E quasi tutti i bambini indicano ciascun oggetto mentre contano, anche quando sanno usare correttamente le parole-numero, per cui c'è corrispondenza uno a uno tra oggetti, atto di indicare e parole (Gelman e Gallistel, 1978). I bambini di circa 3 anni talora sanno contare solo in alcune circostanze. Chiedendo loro tre giocattoli, è possibile che ne prendano una manciata e li consegnino senza contarli. Wynn (1990) li chiama «arraffoni». Gli arraffoni sanno che le parole-numero rappresentano insiemi di elementi maggiori di uno, anche se non hanno ancora capito il ruolo delle parole-numero nel contare, e non usano l'ultima parola del conteggio per indicare la numerosità. È possibile che in uno stadio precedente pensino che la parola-numero sia solo una denominazione dell'oggetto.

Ecco cosa ha fatto Adam, un arraffone, in uno dei compiti proposti da Wynn.

Sperimentatore (S): Allora quanti sono?

Adam (A): [Contando tre oggetti ...] Uno, due, cinque!

S: [Indicando i tre oggetti] Ce ne sono cinque?

A: No, questo è cinque [indicando l'oggetto che ha nominato «cinque»].

S: E cosa succede se conti così: uno, due, cinque? [Lo sperimentatore conta gli oggetti in un ordine diverso da quello usato da Adam.]

A: No, questo è cinque [indicando l'oggetto che ha nominato sistematicamente «cinque»].

In un compito «dammi un numero di oggetti», i «contatori», solitamente di qualche mese più grandi degli arraffoni, contano, ad alta voce o mentalmente, consegnando gli oggetti uno alla volta. Inoltre, rispondono alla domanda «Quanti sono?» fornendo coerentemente l'ultima parola-numero del conteggio, mostrando così il possesso del principio di cardinalità. Questi bambini, inizialmente, sono in grado di contare solo piccole numerosità, e probabilmente costruiscono progressivamente la loro competenza da 1 a 2, da 2 a 3, da 3 a 4 e così in avanti. In un compito «dammi un numero di oggetti», dapprima sono in grado di consegnare coerentemente un oggetto, poi di darne due ma forse non tre, poi tre ma forse non quattro. Così, a 3 anni e mezzo la maggior parte dei bambini comprende le piccole numerosità e sa che contare è un modo per trovare la numerosità di un insieme. Secondo Gelman e colleghi, i bambini che imparano a contare conoscono i principi prima che le loro abilità siano pienamente sviluppate (Gelman e Gallistel, 1978). Naturalmente, la loro prestazione è influenzata dalla grandezza del numero, per cui i numeri grandi risultano più difficili (Fuson, 1988), e la padronanza dei tre principi non è del tutto sincronizzata: viene raggiunta prima quella del principio dell'ordine stabile, poi di quello della corrispondenza biunivoca tra parole-conta e oggetti e per ultima quella del principio di cardinalità (Fuson, 1988, capitolo 10).

Anche il principio della parola cardinale — l'ultimo numero utilizzato nel conteggio corrisponde alla numerosità dell'insieme contato — deriva dal concetto di numerosità, poiché viene stabilita una correlazione tra gli elementi di un insieme di numerosità nota, le parole-numero fino — ad esempio — a cinque e gli elementi dell'insieme di oggetti da contare, la cui numerosità è incognita. Può emergere anche attraverso l'esperienza pratica. Ricordiamo che i bambini piccoli sono in grado di riconoscere la numerosità di oggetti fino circa a tre. Fuson (1988) suggerisce che i bambini potrebbero notare il fatto che, quando contano un insieme «uno, due, tre», pervengono allo stesso numero ottenuto tramite il subitizing e questo li aiuta ad acquisire la consapevolezza che contare fino a N è un modo di stabilire che un insieme contiene N oggetti. Ripetendo il conteggio, e giungendo allo stesso numero ottenuto tramite il subitizing, si consolida l'idea che ogni nome di numero rappresenta una sola numerosità. Di nuovo, si tratta di un dato ovvio per un adulto, ma non per il bambino, soprattutto perché, provando, il bambino otterrà talvolta risultati diversi contando lo stesso insieme. Conterà «uno, due, tre dinosauri» e dopo magari «uno, due, quattro dinosauri», e poi ancora «uno, due, tre, quattro dinosauri», e potrebbe domandarsi se la stessa numerosità, quella dell'insieme di dinosauri, possa essere indicata da parole-numero diverse.

Piaget (1952) fu tra i primi a rilevare che avere il pieno possesso del concetto di numerosità significa essere in grado di astrarre (ignorare) dalle caratteristiche percettive non rilevanti dell'insieme da contare, per cui non si pensa che ci siano più oggetti solo perché, ad esempio, sono sparpagliati anziché raggruppati. Concepì lo sviluppo del pensiero, in generale, del bambino come una progressiva transizione dal particolare al generale e astratto. Il contrasto tra le diversi fonti di dati sulla numerosità può essere rilevato con grande chiarezza nel modo in cui i bambini tra 4 e 6 anni cercano di stabilire se due insiemi siano dello stesso numero. In questo periodo sembra che pervengano a trascurare gli aspetti percettivi, quali ad esempio la disposizione degli oggetti, e ad affidarsi unicamente ai dati strettamente connessi alla numerosità, come la corrispondenza e il conteggio. Non sono più tratti in inganno dallo spostamento degli oggetti. In termini piagetiani, il numero viene conservato nonostante i cambiamenti percettivi. Il bambino progredisce verso la conservazione, segno che il concetto di numero è compreso, per stadi. Dapprima, il bambino considera unicamente i dati percettivi; poi è in grado di utilizzare la corrispondenza uno a uno, ma potrebbe ancora tenere conto dei dati percettivi; infine, fa affidamento solo sulla corrispondenza, senza lasciarsi ingannare dai dati percettivi.

Piaget riteneva che contare e imparare le necessarie parole-numero non fosse necessario a sviluppare il concetto di numerosità, che egli riteneva venisse costruito sulla base dei concetti logici e del ragionamento fintanto che il suo possesso si evidenziava attraverso la conservazione del numero nonostante varie trasformazioni, stadio raggiunto a circa 6 anni.

Lo sviluppo dell'aritmetica

Per la maggior parte dei bambini, contare è la base dell'aritmetica. Poiché sommando due numerosità si ottiene lo stesso risultato che contando gli elementi di due insiemi delle stesse due numerosità, i bambini iniziano a conoscere l'addizione unendo due insiemi e contando gli elementi della loro combinazione.

Dal contare tutto al contare in avanti

Nelle prime fasi di apprendimento dell'aritmetica i bambini utilizzano la loro capacità di contare. Le parole-numero, come abbiamo visto nell'introduzione, hanno sia una sequenza sia un significato di numerosità (o cardinale). Come rilevano Fuson e Kwon (1992), «perché le parole-numero possano essere usate nell'addizione e sottrazione, devono acquisire il loro significato cardinale» (p. 291). I bambini spesso rappresentano la numerosità dell'addendo usando oggetti che possono contare, soprattutto le dita, che li aiutino a riflettere sui problemi aritmetici e a risolverli.

Sembrano esserci tre principali fasi nello sviluppo del contare come strategia di addizione.

1. *Contare tutto*. Per fare 3 + 5, il bambino conta «uno, due, tre» e poi «uno, due, tre, quattro, cinque» oggetti per stabilire la numerosità degli insiemi da sommare, così da rendere visibile i due insiemi: ad esempio, tre dita su una mano e cinque sull'altra. Il bambino conta poi tutti gli oggetti.
2. *Contare in avanti a partire dal primo addendo.* Alcuni bambini scoprono che non è necessario contare il primo addendo: partono da 3 e contano poi in avanti per altri 5 e arrivano al risultato. Utilizzando il conteggio sulle dita, il bambino non conta più il primo insieme, ma parte dalla parola «tre» e usa una mano per contare in avanti il secondo addendo: «Quattro, cinque, sei, sette, otto».
3. *Contare in avanti a partire dall'addendo più grande.* Quello di contare il minore dei due addendi è un metodo più efficiente e meno soggetto a errori. Il bambino sceglie di partire dal numero più grande: «Cinque» e poi va avanti «Sei, sette, otto» (Butterworth, 1999; Carpenter e Moser, 1982).

Questi stadi non sono distinti nettamente, poiché i bambini possono muoversi tra l'uno e l'altro a seconda della situazione. Vi è un forte passaggio allo stadio 3 nei primi sei mesi di scuola (attorno ai 5-6 anni negli Stati Uniti, dove questo studio è stato condotto; Carpenter e Moser, 1982). Allo stadio 3 si evidenzia la comprensione del fatto che, indipendentemente dall'ordine degli addendi, la somma fornisce sempre lo stesso risultato; questa consapevolezza potrebbe derivare dalla comprensione degli effetti dell'unione di due insiemi.

Anche nelle primissime fasi dello sviluppo delle abilità di addizione, i bambini non hanno bisogno di contare l'unione degli insiemi. In una serie di esperimenti, Starkey e Gelman (1982) hanno mostrato ad alcuni bambini due insiemi, uno alla volta, per cui non potevano contarne tutti gli elementi. In queste condizioni, la maggior parte dei bambini di 3 anni era in grado fare 2 + 1, e qualcuno anche 4 + 2. All'età di 5 anni, tutti i bambini sapevano eseguire la prima operazione e l'81% la seconda. È interessante notare come solo il 56% riuscisse a fare 2 + 4, dato che suggerisce che alcuni bambini non contavano in avanti dall'addendo maggiore, ma contavano ancora a partire dal primo.

Dal contare in avanti ai fatti aritmetici

L'adulto competente generalmente non ha bisogno di contare o fare calcoli per operazioni a una cifra come 3 + 5, 3 x 5, 5 – 3 o 6 : 3, ma recupera semplicemente il risultato dalla memoria.

Riguardo all'organizzazione mentale dei fatti aritmetici sono stati proposti vari modelli. Una prospettiva influente è stata quella secondo cui i bambini imparano ad associare 3 + 5 con diverse risposte, ma l'associazione con 8 finisce per prevalere (Siegler e Shrager, 1984). Un'altra ipotesi è quella secondo cui i fatti sono generalmente immagazzinati come associazioni specificamente verbali, benché la sottrazione e la divisione richiedano ulteriori processi di «elaborazione semantica» che implicano la manipolazione di una rappresentazione di quantità analoghe (Dehaene e Cohen, 1995). In entrambi i modelli, il recupero dipende dalla storia di apprendimento del soggetto. Perciò, i fatti che vengono appresi prima o esercitati di più saranno quelli più accessibili.

Il principale dato che contrasta queste prospettive è che i tempi di recupero variano notevolmente in funzione della grandezza dei numeri presenti nelle operazioni a una cifra: più è grande la somma o il prodotto dell'operazione, più occorre tempo per eseguirla (Ashcraft et al., 1992). Questo fattore è molto più influente della frequenza di esposizione all'operazione (Butterworth, Girelli, Zorzi e Jonckheere, 2001).

Occorre inoltre notare che i bambini che usano una strategia di conteggio per risolvere i problemi aritmetici non utilizzano il recupero dalla memoria. È probabile che il bambino inizi a memorizzare i risultati nel corso dello stadio 3, quello in cui conta a partire dall'addendo maggiore. Questo significherebbe che il bambino calcola il risultato di addendo maggiore + addendo minore (anziché primo addendo + secondo addendo) e lo immagazzina in quella forma. Alcuni dati a sostegno di questa ipotesi sono forniti dallo studio di Butterworth e colleghi (2001), i quali mostrano che gli adulti, che presumibilmente recuperano le risposte, sono più rapidi a risolvere le addizioni addendo maggiore + addendo minore che non quelle addendo minore + addendo maggiore. La frequenza di tali operazioni nei libri di testo non è un valido predittore dei tempi di risoluzione. Questo, insieme all'effetto della grandezza dei numeri coinvolti, suggerisce che i fatti additivi sono organizzati in relazione alla grandezza dei numeri piuttosto che come vettori verbali ortogonali o come rete di associazioni regolata dagli effetti dell'esercizio.

Risultati simili sono stati ottenuti con bambini di 6-10 anni che svolgevano moltiplicazioni. L'operazione numero maggiore x numero minore era più veloce dell'operazione numero minore x numero maggiore, sebbene nel sistema di istruzione specifico (quello italiano) si insegni prima a fare l'operazione numero minore x numero maggiore. Ad esempio, nella tavola pitagorica (italiana) 2 x 6 è nella tabellina del 2, che viene insegnata prima di 6 x 2, la quale è nella tabellina del 6 (Butterworth, Marchesini e Girelli, 2003). Di fatto, questo studio ha dimostrato che i bambini iniziano privilegiando la forma in cui l'operazione viene insegnata, e più tardi riorganizzano il loro magazzino di memoria favorendo la forma numero maggiore x numero minore. Di nuovo, questo suggerisce un'organizzazione numerica specifica per i fatti aritmetici. Non si tratta di mere associazioni meccaniche.

Moltiplicazione, divisione e frazioni

Nei curricoli, moltiplicazione e divisione sono solitamente introdotte dopo l'addizione e la sottrazione, e vengono spiegate in termini di addizione e sottrazione ripetute e di ripartizione di insiemi, e quindi sulla base dei concetti di insieme e numerosità. Di fatto, Piaget (1952) tratta la moltiplicazione, in termini di corrispondenza uno a molti, alcuni anni dopo l'addizione e la sottrazione. Tuttavia, le idee riguardo alla divisione come ripartizione compaiono molto presto nello sviluppo, per certi aspetti addirittura prima del contare (Nunes e Bryant, 1996), e nel Regno Unito l'idea di metà come ripartizione di un insieme viene introdotta nella prima classe primaria (DfEE, 1999). Alcune operazioni di moltiplicazione possono senz'altro essere risolte attraverso l'addizione o tramite il doppio conteggio di moltiplicatore e moltiplicando. Tuttavia, concepire la moltiplicazione o la divisione di due numeri soltanto in termini di insiemi con corrispondenze uno a molti non permette di spiegare alcune situazioni che il bambino incontra, oltre che in classe, anche nella vita quotidiana: un prezzo come «50 cent l'uno» non indica né l'insieme di oggetti da comperare né l'insieme dei soldi necessari. Piuttosto, indica la relazione tra i due insiemi, e rimane uguale (è conservata, se si preferisce) sia che di oggetti se ne comperino sei o sessanta. Perciò, la moltiplicazione per il prezzo non aumenta il prezzo, ma solo il costo. Il prezzo è un rapporto, o un tipo di divisione, che si conserva in alcuni tipi di moltiplicazione. Ad esempio, 2/4 è lo stesso rapporto indicato da 4/8 o 100/200. Comprendere questo è fondamentale per capire moltissimi problemi matematici proposti nella scuola prima, inclusi quelli con moltiplicazioni, divisioni e frazioni.

Questi tipi di numeri vengono spesso definiti «quantità intensive», per distinguerli dai numeri che hanno significato «estensivo», vale a dire insiemi (Schwartz, 1988). Interpretare i numeri come quantità intensive è necessario per risolvere i problemi quotidiani che riguardano la temperatura e la concentrazione. I bambini di 6-8 anni credono che, unendo due tazze contenenti acqua calda a 40°, si ottenga una miscela più calda, perché si sommano temperature (Stavy e Tirosh, 2000); i bambini di 10-11 anni fanno fatica a stabilire quale di due miscele di succo d'arancia concentrato e acqua saprà più di arancia: 3 tazze di concentrato mescolate a 2 tazze d'acqua oppure 4 tazze di concentrato mescolate a 3 tazze d'acqua (Noelting, 1980a; 1980b). In nessuno dei due casi la conoscenza della numerosità prepara adeguatamente il bambino a ragionare nel modo appropriato. Piaget (1952) rilevava la difficoltà dei problemi che includevano le proporzioni.

La divisione introduce anche un nuovo tipo di numero, in termini di frazioni e decimali, e cioè i numeri razionali. Questi sono stati incontrati in precedenza solo con il concetto di metà, ma sono estremamente importanti nel contesto quotidiano delle misure. Di nuovo, i concetti implicati dalla numerosità (come quello che ogni numero ha un unico successore) in questi casi non aiutano.

Nunes e Bryant (1996), in una rassegna molto utile, aprono la loro discussione sul ragionamento multiplicativo con un'avvertenza: questo «è un argomento molto complicato perché assume forme diverse e riguarda molte situazioni, e ciò significa che anche la ricerca empirica su questo tema è complicata» (p. 143). Appare chiaro che se il bambino può pensare alla moltiplicazione e alla divisione in termini di manipolazioni di insiemi, allora sono relativamente semplici da acquisire, ma quando il compito richiede la comprensione dei numeri in termini di quantità intensive la questione si complica.

Comprensione dei concetti aritmetici

I bambini fanno il loro ingresso a scuola avendo concetti informali di numero e aritmetica basati sulle loro esperienze di conteggio e calcolo; tuttavia, buona parte della prassi di insegnamento della matematica è stata, ed è tuttora, concentrata sulla ripetizione meccanica dei fatti aritmetici di base come le tabelline e le somme. La giustificazione teorica veniva dal lavoro di Thorndike (1922), che formulò la «legge dell'effetto» — quello che ora chiameremmo rinforzamento —, secondo la quale le associazioni che conducono a uno «stato di cose soddisfacente» vengono rinforzate, e quelle che portano a stati insoddisfacenti si indeboliscono. L'idea era quindi quella di costruire reti di associazioni rinforzate tra combinazioni di numeri, come 5 + 3, e il loro risultato aritmetico. Man mano che la rete, sapientemente predisposta dall'insegnante, si costruisce nella mente del bambino, vengono apprese le generalizzazioni (concetti e leggi). Naturalmente, Thorndike insisteva sul fatto che esercitare i fatti aritmetici doveva essere divertente, il che significava, tra le altre cose, mostrarne le applicazioni pratiche. Più di recente, ha avuto influenza il modello di «distribuzione delle associazioni» (Siegler, 1988; Siegler e Shrager, 1984), secondo il quale il bambino potrebbe associare una combinazione di numeri sia con il risultato corretto che con quello sbagliato. La chiave per promuovere il successo in aritmetica è rafforzare l'associazione con la risposta giusta. Il modello prevede che la prestazione in compiti con fatti aritmetici a una cifra corrisponda alla frequenza di associazione tra l'operazione (ad esempio, 6 + 3, 6 x 3, 6 – 3, 6 : 3) e la soluzione corretta (9, 18, 3, 2) rispetto alla frequenza di associazione tra l'operazione e le soluzioni errate.

Già mentre gli insegnanti facevano proprio l'approccio di Thorndike, una via alternativa era percorsa da Brownell, il quale privilegiava l'«apprendimento significativo» rispetto alla ripetizione meccanica (Brownell, 1935). Benché la ricerca abbia dimostrato che la ripetizione può rendere più rapido il recupero dei fatti aritmetici, la generalizzazione degli apprendimenti a problemi nuovi era molto migliore quando c'era stato l'apprendimento significativo (per una discussione si veda Resnick e Ford, 1981, capitolo 1). È quindi probabile che il lasso di tempo necessario per comprendere i concetti e principi aritmetici, e applicarli in modo significativo, sia condizionato dal tipo di insegnamento che il bambino riceve (Canobi, Reeve e Pattison, 1998).

Proprietà commutativa e associativa

Il ruolo della comprensione di queste proprietà è stato valutato riguardo ai fatti sia additivi (6 + 3, 3 + 6) sia moltiplicativi (6 x 3, 3 x 6). Se si conosce la proprietà commutativa, è necessario o anche solo desiderabile l'immagazzinamento in memoria di entrambe le forme di operazione? I dati mostrano che la forma addendo maggiore + addendo minore è più facilmente accessibile della forma addendo minore + addendo maggiore (Butterworth et al., 2001). Questo, tuttavia, non implica la comprensione della proprietà, ma potrebbe semplicemente dipendere dal fatto che il bambino ha imparato che l'ordine degli addendi non importa. Come accennato sopra, Butterworth e colleghi (2003) hanno rilevato che i bambini di 6-10 anni che apprendono le tabelline riorganizzano i fatti memorizzati privilegiando la forma numero maggiore x numero minore rispetto a quella numero minore x numero maggiore, anche quando quest'ultima è stata appresa prima dell'altra e quindi presumibilmente esercitata di più. Di nuovo, questo suggerisce, benché non dimostri, che questi bambini comprendono la proprietà commutativa della moltiplicazione.

È interessante notare che in alcune culture non vengono insegnati tutti i fatti moltiplicativi come nelle tabelline, dall'1 x 1 al 9 x 9. In Cina ne viene insegnata solo una metà, a partire da 2 x 2 (la tabellina dell'1 è considerata banale) fino a 2 x 9; tuttavia, poiché 2 x 3 è già stato appreso, la tabellina del 3 viene insegnata a partire da 3 x 3, e così via. In questo modo, devono essere memorizzati solo 36 fatti e deve essere appresa l'equivalenza delle coppie commutate (Yin Wengang, comunicazione personale). La ricerca mostra che gli adulti cinesi sono più accurati e veloci nell'eseguire operazioni di moltiplicazione rispetto ai loro pari occidentali (Campbell e Xue, 2001; LeFevre e Liu, 1997) e, sebbene questo dato sia stato attribuito a un maggiore esercizio (Campbell e Xue, 2001; Penner-Wilger, Leth-Steensen e LeFevre, 2002), di fatto potrebbe essere dovuto alla ragione opposta, cioè un minore numero di fatti da memorizzare e una migliore comprensione.

Complementarità

Piaget (1952) ha affermato, del tutto ragionevolmente, che un bambino non comprende realmente l'addizione o la sottrazione se non comprende il rapporto tra di esse, e cioè che, se 5 + 3 fa 8, allora 8 – 5 deve fare 3, e 8 – 3 deve fare 5. Questo è il principio di complementarità. Tutto questo dovrebbe derivare dalla conoscenza degli insiemi e della numerosità: se all'insieme A aggiungiamo l'insieme B e poi lo togliamo nuovamente, la numerosità risultante sarà ancora A. I bambini comprendono il principio di complementarità? E, se lo comprendono, a quale età o stadio emerge? Naturalmente, è perfettamente possibile arrivare alla risposta corretta senza conoscere il principio di complementarità. Per converso, è possibile conoscere il principio e tuttavia fornire talora risposte sbagliate. Questo significa che la capacità o incapacità di eseguire queste operazioni non è un'indicazione certa della comprensione.

I ricercatori si sono chiesti se le operazioni di «inversione» che possono essere eseguite applicando il principio vengano svolte meglio rispetto alle operazioni che non possono essere risolte attraverso la sua applicazione. Starkey e Gelman (1982) non hanno riscontrato dati convincenti rispetto alla comprensione di tale principio nei bambini di 3-5 anni, mentre altri autori hanno rilevato dati positivi in bambini più grandi (Stern, 1992).

Uno studio sistematico di questo aspetto è stato condotto da Bryant, Christie e Rendu (1999), i quali hanno osservato un gruppo di bambini di 5-7 anni esaminando le strategie di soluzione che utilizzavano. Ad esempio, in un compito con un insieme di oggetti, se vengono aggiunti tre nuovi oggetti e poi ne vengono tolti altrettanti, è possibile pervenire alla risposta corretta sulla base di una generale procedura «fare e disfare» valida nelle situazioni sia numeriche che non, come ad esempio lanciare del colore su un muro e poi lavarlo via. Bryant e colleghi hanno controllato questo aspetto confrontando la situazione in cui vengono aggiunti e tolti oggetti uguali con la situazione in cui viene aggiunto e tolto lo stesso numero di oggetti diversi. Hanno anche considerato problemi equivalenti con i numeri. I bambini riuscivano meglio nelle operazioni di inversione, come 12 + 9 – 9, che in quelle di controllo, appaiate per somma, come 10 + 10 – 8. In più, erano in grado di applicare il principio in problemi più complessi che richiedevano la scomposizione del sottraendo, utilizzandolo in problemi come 7 + 4 – 5 dove scomponevano il 5 in 4 + 1. Di fatto, molti dei bambini — ma non tutti — che, tramite l'analisi delle loro prestazioni, mostravano di usare il principio erano in grado di enunciarlo verbalmente. Sebbene i bambini che applicavano il principio per risolvere i problemi di inversione fornissero prestazioni generalmente migliori rispetto ai bambini che calcolavano le soluzioni, non tutti i bambini che fornivano buone prestazioni lo applicavano. L'analisi fattoriale e le correlazioni hanno individuato due fattori distinti: uno di calcolo e uno di comprensione.

Questioni simili emergono in relazione alla complementarità di moltiplicazione e divisione. Se è noto che 9 x 3 = 27, allora dovrebbe conseguirne, senza bisogno di calcolare, sia che 27 : 9 = 3 sia che 27 : 3 = 9. La tabella 1 riassume le principali tappe dello sviluppo normale della competenza aritmetica.

TABELLA 1 Principali tappe dei primi anni di normale sviluppo della competenza aritmetica

Età (anni; mesi)	Tappe
0;0	Discrimina in base a piccole numerosità (Antell e Keating, 1983)
0;4	Somma e sottrae uno (Wynn, 1992)
0;11	Distingue sequenze di numerosità crescenti e decrescenti (Brannon, 2002)
2;0	Inizia ad apprendere la sequenza di parole-conta (Fuson, 1992); è in grado di stabilire la corrispondenza uno a uno nei compiti di ripartizione (Potter e Levy, 1968)
2;6	Riconosce che le parole-numero significano «maggiore di uno» («arraffoni»; Wynn, 1990)
3;0	Conta piccoli numeri di oggetti (Wynn, 1990)
3;6	Somma e sottrae uno con oggetti e parole-numero (Starkey e Gelman, 1982); è in grado di usare il principio cardinale per stabilire la numerosità di un insieme (Gelman e Gallistel, 1978)
4;0	Usa le dita per aiutarsi nell'addizione (Fuson e Kwon, 1992)
5;0	È in grado di aggiungere piccoli numeri senza essere capace di contare la somma (Starkey e Gelman, 1982)
5;6	Comprende la proprietà commutativa dell'addizione e conta in avanti a partire dall'addendo maggiore (Carpenter e Moser, 1982); conta correttamente fino a 40 (Fuson, 1988)
6;0	«Conserva» il numero (Piaget, 1952)
6;6	Comprende la complementarità di addizione e sottrazione (Bryant et al., 1999); conta correttamente fino a 80 (Fuson, 1988)
7;0	Recupera alcuni fatti aritmetici dalla memoria

Differenze di genere in aritmetica?

In passato, entro i 18 anni di età, i maschi raggiungevano un rendimento scolastico migliore delle femmine e questo fatto è stato un problema ufficiale da quando il Cockcroft Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics ha presentato il suo rapporto per il governo britannico. Si era nel 1982. Prima di allora, pochi sembravano curarsene ed era opinione diffusa che fosse quasi inappropriato per le ragazze essere brave in matematica. In un manuale per gli insegnanti relativamente illuminato, pubblicato nel 1937, il governo britannico consigliava:

> Per quanto riguarda le capacità mentali e gli interessi intellettuali [i maschi e le femmine] sono molto simili, dato che la gamma di differenza all'interno di ciascun sesso è maggiore della differenza tra i sessi. Tuttavia, nella prima adolescenza i pensieri di maschi e femmine iniziano a rivolgersi ai loro futuri ruoli di uomini e donne con tale forza che sarebbe del tutto inappropriato basare la loro istruzione soltanto sulla loro somiglianza intellettuale. (Cockcroft, 1982, appendice B)

Attualmente, tuttavia, in Inghilterra accade spesso che le femmine abbiano un rendimento scolastico migliore dei maschi, a ogni età e in ogni disciplina; con una sola eccezione: la matematica, nella quale le femmine superano di poco i maschi (DfES, 2004).

Geary (1996) ha passato in rassegna i dati relativi a numerosi Paesi industrializzati mostrando che i maschi, mediamente, continuano a presentare prestazioni superiori, rispetto alle femmine, nella risoluzione di problemi matematici. Tra gli adolescenti americani, sono più maschi che femmine quelli che raggiungono i punteggi più elevati al SAT-M *(Scholastic Aptitude Test – Mathematics),* un requisito per l'ammissione all'università. Quanto più si sale nei livelli di competenza, tanto più cresce lo scarto tra maschi e femmine. Tuttavia, anche negli Stati Uniti, tra i diciassettenni *medi* la differenza tra maschi e femmine è solo dell'1%. Il più recente confronto internazionale, che ha utilizzato le stesse prove in tutti i Paesi, il *Third International Maths and Science Survey* (TIMSS; Keys, Harris e Fernandes, 1996), conferma il quadro generale secondo cui nella maggior parte dei Paesi, compresi gli Stati Uniti, non vi è differenza statistica tra maschi e femmine (tabella 2). Rimangono però ancora alcuni Paesi, e in particolare l'Inghilterra, nei quali i maschi hanno un rendimento scolastico sistematicamente superiore alle femmine. Quello che appare certamente chiaro dai dati del TIMSS è che la differenza tra Paesi, tra pratiche educative, influisce sulle prestazioni molto più della differenza tra sessi.

Discalculia evolutiva

I disturbi dello sviluppo aritmetico, la «discalculia evolutiva», possono rivelarsi utili per comprendere il corso di normale sviluppo e per affrontare la nostra domanda originale: la discalculia è conseguenza di un'anomalia in una capacità cognitiva generale o di un'anomalia in un'innata capacità numerica? Lo UK Department for Education and Skills definisce la discalculia in questo modo:

> Disturbo che influisce sulla capacità di acquisire abilità aritmetiche. I soggetti con discalculia possono avere difficoltà a comprendere semplici concetti numerici, essere

TABELLA 2 Confronti internazionali delle differenze tra sessi nella competenza aritmetica a due diverse età (Keys et al., 1996)

Età: 9-10 anni			**Età: 14 anni**		
Paese	*Punteggio medio*	*Differenza a favore dei maschi*	*Paese*	*Punteggio medio*	*Differenza a favore dei maschi*
Singapore	625	−10	Singapore	601	0
Scozia	520	0	Ungheria	502	1
Stati Uniti	544	2	Canada	494	2
Canada	533	3	Germania	485	2
Ungheria	549	5	Scozia	464	3
Inghilterra	513	5	Stati Uniti	476	5
Norvegia	502	5	Svezia	478	5
Giappone	693	8*	Francia	493	8
Paesi Bassi	577	15*	Giappone	571	11*
			Svizzera	506	14*
			Inghilterra	476	17*

* Differenza statisticamente significativa

> privi della capacità intuitiva di cogliere i numeri e avere difficoltà nell'apprendere i fatti numerici e le procedure aritmetiche. Anche quando forniscono risposte corrette o utilizzano metodi adeguati, è possibile che lo facciano in modo meccanico e senza sicurezza. (DfES, 2001)

Questa definizione attira l'attenzione sulla «capacità intuitiva di cogliere i numeri», che essenzialmente è la capacità di cogliere il concetto di numerosità. Le altre difficoltà che i soggetti con discalculia incontrano nascono proprio da questa incapacità.

Prevalenza dei disturbi dell'apprendimento aritmetico

I disturbi specifici di apprendimento della matematica sono tuttora poco conosciuti e riconosciuti. I bambini possono «andare male» in matematica in diversi modi: alcuni possono avere particolari difficoltà con i fatti aritmetici, altri con le procedure e strategie (Temple, 1991), altri ancora — la maggior parte — sembrano avere difficoltà in tutti i compiti numerici (Landerl, Bevan e Butterworth, 2004). Le definizioni tradizionali del disturbo (ad esempio quella del DSM-IV) affermano che il bambino deve presentare, ai test standardizzati, una prestazione significativamente inferiore rispetto a quella attesa per età, livello di istruzione e intelligenza, e deve mostrare una conseguente compromissione del funzionamento nell'apprendimento scolastico o nella vita quotidiana. I test standardizzati, tuttavia, valutano generalmente una gamma di abilità, che può includere anche quelle spaziali e verbali, prima di sintetizzare le prestazioni in un punteggio globale di «competenza matematica». Inoltre, i test sono diversi l'uno dall'altro, perciò è possibile che quello che intendono con «competenza matematica» vari in maniera anche sostanziale da una batteria di prove a un'altra. Per questa ragione è stato difficile per i ricercatori individuare con esattezza i deficit chiave nella discalculia o disporre di elementi certi per individuare i soggetti con discalculia da esaminare. Per indicare il disturbo evolutivo di apprendimento della matematica è stata usata una varietà di definizioni: discalculia evolutiva (DE; Shalev e Gross-Tsur, 1993; Temple, 1991), disabilità matematica (DM; Geary, 1993), disabilità di apprendimento dell'aritmetica (DA, DAA, DARIT; Geary e Hoard, 2001; Koontz e Berch, 1996; Siegel e Ryan, 1989), disturbo dei fatti numerici (DFN; Temple e Sherwood, 2002) e difficoltà psicologiche in matematica (Allardice e Ginsburg, 1983). Come sottolineano Geary (1993) e Geary e Hoard (2001), queste differenti definizioni sembrano nella maggior parte dei casi indicare lo stesso disturbo.

In questa sede viene usata la definizione «discalculia evolutiva», con la quale però ci si riferisce a tutti i gruppi indicati sopra. La tabella 3 mostra tre stime di prevalenza, fra le quali si rilevano forti differenze, probabilmente dovute alla diversità di criteri utilizzati. Vi è inoltre, nonostante le differenze tra studi riguardo sia ai criteri sia all'ortografia della lingua dei soggetti, una forte comorbilità con i deficit nella letto-scrittura. Tuttavia, più della metà di tutti i bambini con discalculia individuati in questi studi non presenta difficoltà con la letto-scrittura, il che pone due importanti domande: (1) perché l'incidenza delle difficoltà di letto-scrittura nei discalculici e delle difficoltà matematiche nei dislessici è così alta rispetto alla popolazione di bambini «normali»? (2) perché la maggior parte dei soggetti di entrambi i gruppi non ha un doppio deficit?

Caratteristiche della discalculia

Esiste accordo generale riguardo al fatto che i bambini con discalculia hanno difficoltà ad apprendere e ricordare i fatti aritmetici (Geary, 1993; Geary e Hoard, 2001; Ginsburg, 1997; Jordan e Montani, 1997; Kirby e Becker, 1988; Russell e Ginsburg, 1984; Shalev e Gross-Tsur, 2001) e a eseguire le procedure di calcolo. Attraverso studi di caso, Temple (1991) ha dimostrato che queste due capacità possono essere disgiunte

TABELLA 3 Stime di prevalenza della discalculia evolutiva

Autori dello studio	Paese	Stima di difficoltà di apprendimento	Criterio	Percentuale di difficoltà di letto-scrittura comorbili
Ostad (1998)	Norvegia	10,9% Disabilità in matematica	Assegnazione insegnante di sostegno	51% Disturbo di letto-scrittura
Lewis et al. (1994)	Inghilterra	3,6% Difficoltà specifiche in aritmetica	< 85 al test aritmetico, QI non verbale > 90	64% Difficoltà di lettura
Gross-Tsur et al. (1996)	Israele	6,4% Discalculia	Due anni al di sotto dell'età cronologica	17% Disturbo di lettura

nella discalculia evolutiva, sebbene questo non sembri essere il caso della maggioranza dei bambini discalculici, che hanno problemi in entrambe le aree (Russell e Ginsburg, 1984).

Secondo molti ricercatori, la discalculia sarebbe connessa al funzionamento di capacità generali o di base come la memoria semantica (Geary et al., 2000; 2001). Tuttavia, gli studi nell'ambito della neuropsicologia condotti su adulti con danno neurologico indicano chiaramente che la conoscenza del numero è indipendente dalla memoria semantica (Cappelletti, Butterworth e Kopelman, 2001) e che i sistemi di quest'ultima per le informazioni numeriche sono collocati in aree diverse del cervello rispetto a quelli per le informazioni non numeriche (Thioux, Seron e Pesenti, 1999).

Nel corso del tempo sono state chiamate in causa anche le difficoltà della memoria di lavoro. Geary (1993) suggerisce che la scarsa memoria di lavoro non soltanto conduce a difficoltà nello svolgimento delle procedure di calcolo ma può anche condizionare l'apprendimento dei fatti aritmetici. Koontz e Berch (1996) hanno valutato bambini con e senza discalculia utilizzando lo span di cifre e quello di lettere (quest'ultimo come misura della capacità di memoria di lavoro fonologica, che non può essere confusa con l'elaborazione numerica). Questo studio ha rilevato che i bambini discalculici fornivano prestazioni inferiori in entrambi i compiti di span, senza però controllare il QI. Usando un compito non numerico che valutava la memoria di lavoro fonologica (ripetizione di non-parole), McLean e Hitch (1999) non hanno rilevato differenze, e hanno suggerito che i bambini discalculici non hanno un problema di capacità della memoria di lavoro fonologica in generale, bensì potrebbero avere una difficoltà specifica nella memoria di lavoro per le informazioni numeriche.

Temple e Sherwood (2002) non hanno riscontrato differenze tra gruppi in nessuna delle misure di memoria di lavoro da loro utilizzate (span di cifre in avanti e all'indietro, span di parole e blocchi di Corsi) né correlazioni tra le misure di memoria di lavoro e quelle di capacità numerica. Perciò, sebbene alle difficoltà in matematica possano essere compresenti varie forme di difficoltà della memoria di lavoro, non ci sono dati convincenti del fatto che la memoria di lavoro possa svolgere un ruolo causale nella discalculia.

Esiste un'elevata comorbilità fra disturbi dell'apprendimento (si veda la tabella 2), ma di questo non sono chiare le ragioni. Rourke (1993) ha suggerito che i soggetti con doppio deficit potrebbero avere un problema all'emisfero sinistro mentre i discalculici puri potrebbero avere un'anomalia all'emisfero destro che comprometterebbe le capacità spaziali. Tuttavia, Shalev, Manor e Gross-Tsur (1997) non hanno rilevato alcuna differenza qualitativa tra bambini con difficoltà sia in lettura che in matematica e bambini con difficoltà solo in matematica. Né, laddove venivano appaiati per QI, sono state riscontrate differenze quantitative in compiti matematici tra bambini discalculici e bambini sia con discalculia che con dislessia (Landerl et al., 2004). Altri disturbi che sono stati associati alla discalculia evolutiva sono il disturbo da deficit dell'attenzione/iperattività (Badian, 1983; Rosenberg, 1989; Shalev et al., 2001), la scarsa coordinazione oculo-manuale (Siegel e Ryan, 1989) e la scarsa memoria per il materiale non verbale (Fletcher, 1985). Shalev e Gross-Tsur (1993) hanno esaminato un gruppo di sette bambini con discalculia evolutiva che non rispondevano all'intervento; tutti e sette presentavano ulteriori problemi neurologici, dal piccolo male alla dislessia per i numeri, al disturbo da deficit dell'attenzione e alla sindrome di Gerstmann evolutiva.

In sintesi, benché sia evidente che la discalculia evolutiva si presenta frequentemente in comorbilità con altri disturbi, le relazioni causali tra l'una e gli altri non sono ancora state accertate. Inoltre, l'utilità di distinguere i soggetti discalculici in sottotipi, a seconda dei correlati neuropsicologici o cognitivi, non sarà certa fintanto che non si dimostrerà che ai differenti sottotipi corrispondono manifestazioni qualitativamente diverse di deficit numerico. La discalculia evolutiva sembra essere una difficoltà specifica nella comprensione dei concetti numerici di base, soprattutto del concetto di numerosità. Essa potrebbe incidere sulla capacità di svolgere compiti anche molto semplici come contare o confrontare grandezze numeriche, come abbiamo suggerito nella nostra descrizione dello sviluppo normale. Geary, Hamson e Hoard (2000) hanno riscontrato piccole ma sistematiche differenze tra le prestazioni di bambini della prima classe primaria con e senza discalculia nel confronto di grandezze, mentre Koontz e Berch (1996) hanno rilevato, in un compito di appaiamento di configurazioni di pallini, che i bambini discalculici sembravano contare fino a tre anziché usare il subitizing. Entrambi questi studi indicano che questa capacità fondamentale potrebbe essere connessa alla comprensione della numerosità da parte del bambino. È stato infatti affermato che essa stia alla base dell'acquisizione dell'abilità di contare (Fuson, 1988). Uno studio recente ha evidenziato differenze sistematiche nei tempi di reazione tra bambini con e senza discalculia (compresi alcuni soggetti con dislessia) in prove di conteggio e di confronto di grandezze numeriche (Landerl et al., 2004). Uno strumento specifico per lo screening della discalculia si basa su misure dei tempi di reazione nella stima di numeri di pallini e nel confronto di grandezze (Butterworth, 2003).

Esiste un sistema neuroanatomico specifico?

Le neuroimmagini funzionali rivelano che i lobi parietali, e in particolare i solchi intraparietali, sono attivi nell'elaborazione numerica e nell'aritmetica (Dehaene, Piazza, Pinel e Cohen, 2003), mentre alcuni studi su pazienti con danno cerebrale (Cipolotti e van Harskamp, 2001) hanno individuato il ruolo cruciale del solco intraparietale sinistro e del giro angolare ai fini della prestazione aritmetica normale. Le capacità numeriche più semplici, come quella di stimare la numerosità di piccoli insiemi, sembrano essere specifiche del solco intraparietale destro (Piazza, Mechelli, Butterworth e Price, 2002).

Attualmente non è noto se i solchi intraparietali siano la base delle capacità del bambino piccolo, e di conseguenza il loro ruolo nello sviluppo è tutt'altro che chiaro. Tuttavia, uno studio morfometrico (in voxel) sul cervello di un gruppo di adolescenti ha fornito dati estremamente interessanti. Isaacs, Edmonds, Lucas e Gadian (2001) hanno esaminato due gruppi di adolescenti che alla nascita avevano un peso corporeo molto basso. Un gruppo era cognitivamente normale, mentre l'altro aveva un deficit solo nelle prestazioni al subtest sulle operazioni numeriche del WOND (Wechsler, 1996). Il confronto tra i cervelli dei due gruppi di soggetti ha evidenziato che quelli con difficoltà aritmetica avevano meno materia grigia nel solco intraparietale sinistro. Naturalmente, non possiamo sapere se tale minore quantità di materia grigia sia causa o conseguenza della difficoltà in aritmetica.

Esiste una base genetica specifica?

In uno dei primi studi sistematici della discalculia evolutiva, Kosc (1974) ha suggerito la possibilità di un ruolo dell'ereditarietà. Uno studio più recente condotto su coppie di gemelli nelle quali uno aveva discalculia evolutiva ha rilevato che spesso era discalculico anche l'altro gemello: nel 58% dei casi per i gemelli monozigoti nel 39% dei casi per i gemelli dizigoti, con punteggi di concordanza rispettivamente di .73 e .56 (Alarcon, Defries, Gillis Light e Pennington, 1997). In uno studio su famiglie, Shalev e colleghi (2001) hanno riscontrato che circa la metà dei fratelli e sorelle di bambini con discalculia evolutiva è anch'essa discalculica, con un rischio maggiore di 5-10 volte rispetto alla popolazione generale.

I bambini con sindrome di Williams, che hanno capacità di linguaggio relativamente integre a fronte di gravi compromissioni cognitive, mostrano difficoltà in semplici compiti sulla numerosità, come i confronti di numeri, e nei compiti di seriazione, conteggio e aritmetica di base forniscono prestazioni molto peggiori rispetto ai controlli appaiati per età cronologica e mentale e rispetto ai bambini con sindrome di Down (Paterson, Girelli, Butterworth e Karmiloff-Smith, in preparazione).

Sembra che alcune anomalie del cromosoma X abbiano sulla capacità numerica effetti più gravi che non su altre capacità cognitive. Ciò si evidenzia in modo particolarmente chiaro nella sindrome di Turner, dove i soggetti possono ottenere punteggi normali o superiori alla norma per quanto riguarda QI, linguaggio e lettura, ma appaiono in grave difficoltà nell'aritmetica (Butterworth et al., 1999; Rovet, Szekely e Hockenberry, 1994; Temple e Carney, 1993; Temple e Marriott, 1998).

Conclusioni

La tabella 1 riassume le principali tappe nello sviluppo della competenza aritmetica. Riguardo all'età a cui tali tappe vengono conquistate dal bambino non ci sono regole; le età indicate sono solo quelle a cui la maggior parte dei bambini valutati mostra in maniera ragionevolmente coerente di averle acquisite. Va ricordato che gli studi descritti si concentrano non sull'età ma sulle fasi di sviluppo, che i vari bambini possono raggiungere a età differenti l'uno dall'altro. Teoricamente, queste tappe non dipendono dalla cultura in cui il bambino cresce, ma in realtà i dati su cui si basano sono stati condotti con soggetti cresciuti in Europa o negli Stati Uniti. Ci sono elementi che suggeriscono che la struttura del sistema di parole-numero può accelerare o rallentare l'acquisizione dei concetti aritmetici, per cui i bambini che crescono presso culture che hanno una lingua con un sistema molto regolare, come quella cinese, apprendono prima alcuni concetti aritmetici (Butterworth, 1999; Nunes e Bryant, 1996).

In generale, quindi, lo sviluppo delle capacità aritmetiche può essere considerato in termini di una comprensione sempre più sofisticata della numerosità e delle sue implicazioni e di una crescente abilità nel manipolare numerosità. Il deficit nella capacità di apprendere l'aritmetica — la discalculia — può essere interpretato in molti casi come deficit nel concetto di numerosità da parte del bambino. Occorre tuttavia sottolineare che la nostra conoscenza al riguardo presenta alcune grandi lacune. È necessario comprendere meglio il rapporto tra le capacità precoci che si manifestano nel bambino piccolo e le successive competenze numeriche, soprattutto in riferimento all'emergere del sistema cerebrale dell'emisfero sinistro. Inoltre, non è ancora stato appurato se ci sia un periodo critico o particolarmente sensibile per l'acquisizione dei concetti aritmetici, e come questo potrebbe interagire con l'intervento educativo.

Titolo originale

The development of arithmetical abilities. Tratto da «Journal of Child Psychology and Psychiatry», vol. 46, n. 1, 2005. © 2005, Association of Child Psychology and Psychiatry. Pubblicato con il permesso dell'Editore. Traduzione italiana di Carmen Calovi.

Bibliografia

Alarcon M., Defries J., Gillis Light J. e Pennington B. (1997), *A twin study of mathematics disability,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 30, pp. 617-623.

Allardice B.S. e Ginsburg, H.P. (1983), *Children's psychological difficulties in mathematics.* In H.P. Ginsburg (a cura di), *The development of mathematical thinking,* New York, Academic Press, pp. 319-350.

Antell S.E. e Keating D.P. (1983), *Perception of numerical invariance in neonates,* «Child Development», vol. 54, pp. 695-701.

Ashcraft M.H., Donley R., Halas M.A. e Vakali M. (1992), *Working memory, automaticity and problem difficulty.* In J.I.D. Campbell (a cura di), *The nature and origins of mathematical skills* (vol. *Advances in Psychology,* 91), Amsterdam, North- Holland, pp. 301-329.

Badian N.A. (1983), *Arithmetic and nonverbal learning.* In H.R. Myklebust (a cura di), *Progress in learning disabilities,* New York, Grune and Stratton, vol. 5, pp. 235-264.

Bloom P. (1994), *Generativity within language and other cognitive domains,* «Cognition», vol. 51, pp. 177-189.

Brannon E.M. (2002), *The development of ordinal numerical knowledge in infancy,* «Cognition», vol. 83, pp. 223-240.

Brownell W.A. (1935), *Psychological considerations in the learning and the teaching of arithmetic. The teaching of arithmetic. The tenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics,* New York, Teachers College, Columbia University.

Bryant P., Christie C. e Rendu A. (1999), *Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 74, pp. 194-212.

Bull R. e Johnston R.S. (1997), *Children's arithmetical difficulties: Contributions from processing speed, item identification, and short-term memory,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 65, pp. 1-24.

Butterworth B. (1999), *The mathematical brain,* London, Macmillan.

Butterworth B. (2003), *Dyscalculia screener,* London, NFER Nelson Publishing Company Ltd.

Butterworth B., Girelli L., Zorzi M. e Jonckheere A.R. (2001), *Organisation of addition facts in memory,* «Quarterly Journal of Experimental Psychology», vol. 54A, pp. 1005-1029.

Butterworth B., Granà A., Piazza M., Girelli L., Price C. e Skuse D. (1999), *Language and the origins of number skills: Karyotypic differences in Turner's syndrome,* «Brain and Language», vol. 69, pp. 486-488.

Butterworth B., Marchesini N. e Girelli L. (2003), *Organisation of multiplication facts in memory: Developmental trends.* In A. Baroody e A. Dowker (a cura di), *The development of arithmetical concepts and skills,* Mahwah, NJ, LEA.

Campbell J.I.D. e Xue Q.L. (2001), *Cognitive arithmetic across cultures,* «Journal of Experimental Psychology: General», vol. 130, pp. 299-315.

Canobi K.H., Reeve R.A. e Pattison P. (1998), *The role of conceptual understanding in children's addition problem solving,* «Developmental Psychology», vol. 34, pp. 882-891.

Cappelletti M., Butterworth B. e Kopelman M. (2001), *Spared numerical abilities in a case of semantic dementia,* «Neuropsychologia», vol. 39, pp. 1224-1239.

Carey S. e Spelke E. (in stampa), *Bootstrapping the integer list: Representations of number.* In J. Mehler e L. Bonatti (a cura di), *Developmental cognitive science,* Cambridge, MA, MIT Press.

Carpenter T.P. e Moser J.M. (1982), *The development of addition and subtraction problem solving skills.* In T.P. Carpenter J.M. Moser e T.A. Romberg (a cura di), *Addition and subtraction: A cognitive perspective,* Hillsdale, NJ, LEA, pp. 9-24.

Cipolotti L. e van Harskamp N. (2001), *Disturbances of number processing and calculation.* In R.S. Berndt (a cura di), *Handbook of neuropsychology,* Amsterdam, Elsevier Science, vol. 3.

Cockcroft W.H. (1982), *Mathematics counts: Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the chairmanship of Dr W.H. Cockcroft,* London, HMSO.

Cohen L.B. e Marks K.S. (2002), *How infants process addition and subtraction events,* «Developmental Science», vol. 5, pp. 186-201.

Dehaene S. e Changeux J.-P. (1993), *Development of elementary numerical abilities: A neuronal model,* «Journal of Cognitive Neuroscience», vol. 5, pp. 390-407.

Dehaene S. e Cohen L. (1995), *Towards an anatomical and functional model of number processing,* «Mathematical Cognition», vol. 1, pp. 83-120.

Dehaene S., Piazza M., Pinel P. e Cohen L. (2003), *Three parietal circuits for number processing,* «Cognitive Neuropsychology», vol. 20, pp. 487-506.

DfEE (1999), *The National Numeracy Strategy: Framework for teaching mathematics from Reception to Year 6,* Sudbury, Suffolk, DfEE Publications.

DfES (2001), *Guidance to support pupils with dyslexia and dyscalculia (DfES 0512/2001),* London, Department of Education and Skills.

DfES (2004), *GCSE/GNVQ results and Key Stage 3 to GCSE/GNVQ value added measures for young people in England, 2002/03 (revised) (No. SFR 02/2004),* London, Department of Education and Skills.

Dixon R.M.W. (1980), *The languages of Australia,* Cambridge, Cambridge University Press.

Feigenson L., Spelke E. e Carey S. (2002), *Infants' discrimination of number versus continuous extent,* «Cognitive Psychology», vol. 44, pp. 33-66.

Fletcher J.F. (1985), *Memory for verbal and nonverbal stimuli in learning disabled subgroups: Analysis by selective reminding,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 40, pp. 244-259.

Fuson K.C. (1988), *Children's counting and concepts of number,* New York, Springer Verlag.

Fuson K.C. (1992), *Relationships between counting and cardinality from age 2 to 8*. In J. Bideaud, C. Meljac e J.P. Fisher (a cura di), *Pathways to number, children's developing numerical abilities,* Hillsdale, NJ, LEA.

Fuson K.C. e Kwon Y. (1992), *Learning addition and subtraction: Effects of number words and other cultural tools*. In J. Bideaud, C. Meljac e J.P. Fisher (a cura di), *Pathways to number, children's developing numerical abilities,* Hillsdale, NJ, LEA.

Geary D.C. (1993), *Mathematical disabilities: Cognition, neuropsychological and genetic components,* «Psychological Bulletin», vol. 114, pp. 345-362.

Geary D.C. (1996), *Sexual selection and sex differences in mathematical abilities,* «Behavioral and Brain Sciences», vol. 19, pp. 229 ss.

Geary D.C., Hamson C.O. e Hoard M.K. (2000), *Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 77, pp. 236-263.

Geary D.C. e Hoard M.K. (2001), *Numerical and arithmetical deficits in learning-disabled children: Relation to dyscalculia and dyslexia,* «Aphasiology», vol. 15, pp. 635-647.

Gelman R. e Gallistel C.R. (1978), *The child's understanding of number,* Cambridge, MA, Harvard University Press.

Gelman R. e Meck E. (1983), *Preschoolers counting: Principles before skill,* «Cognition», vol. 13, pp. 343-359.

Giaquinto M. (1995), *Concepts and calculation,* «Mathematical Cognition», vol. 1, pp. 61-81.

Giaquinto M. (2001), *Knowing numbers,* «Journal of Philosophy», vol. XCVIII, pp. 5-18.

Ginsburg, H.P. (1997), *Mathematics learning disabilities: A view from developmental psychology,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 30, pp. 20-33.

Gross-Tsur V., Manor O. e Shalev R.S. (1996), *Developmental dyscalculia: Prevalence and demographic features,* «Developmental Medicine and Child Neurology», vol. 38, pp. 25-33.

Hulme C. e Mackenzie S. (1992), *Working memory and severe learning difficulties,* Hove, Lawrence Erlbaum.

Isaacs E.B., Edmonds C.J., Lucas A. e Gadian D.G. (2001), *Calculation difficulties in children of very low birthweight: A neural correlate,* «Brain», vol. 124, pp. 1701-1707.

Jordan N. e Montani T. (1997), *Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 30, pp. 624-634.

Keys W., Harris S. e Fernandes C. (1996), *Third International Mathematics and Science Study. First National Report. Part 1,* Slough, National Foundation for Educational Research.

Kirby J.R. e Becker L.D. (1988), *Cognitive components of learning problems in arithmetic,* «Remedial and Special Education», vol. 9, pp. 7-16.

Koechlin E., Naccache L., Block E. e Dehaene S. (1999), *Primed numbers: Exploring the modularity of numerical representations with masked and unmasked semantic priming,* «Journal of Experimental Psychology-Human Perception and Performance», vol. 25, pp. 1882-1905.

Koontz K.L. e Berch D.B. (1996), *Identifying simple numerical stimuli: Processing inefficiencies exhibited by arithmetic learning disabled children,* «Mathematical Cognition», vol. 2, pp. 1-23.

Kosc L. (1974), *Developmental dyscalculia,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 7, pp. 159-162.

Landerl K., Bevan A. e Butterworth B. (2004), *Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8-9 year old students,* «Cognition», vol. 93, pp. 99-125.

LeFevre J. e Liu J. (1997), *The role of experience in numerical skill: Multiplication performance in adults from Canada and China,* «Mathematical Cognition», vol. 3, pp. 31-62.

Lewis C., Hitch G. e Walker P. (1994), *The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9- and 10-year-old boys and girls,* «Journal of Child Psychology and Psychiatry», vol. 35, pp. 283-292.

Mandler G. e Shebo B.J. (1982), *Subitizing: An analysis of its component processes,* «Journal of Experimental Psychology: General», vol. 11, pp. 1-22.

McLean J.F. e Hitch G.J. (1999), *Working memory impairments in children with specific arithmetical difficulties,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 74, pp. 240-260.

Mix K.S., Huttenlocher J. e Levine S. (2002), *Quantitative development in infancy and early childhood,* New York, Oxford University Press.

Noelting G. (1980a), *The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I – Differentiation of stages,* «Educational Studies in Mathematics», vol. 11, pp. 217-253.

Noelting G. (1980b), *The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II – Problem structure at successive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring,* «Educational Studies in Mathematics», vol. 11, pp. 331-363.

Nunes T. e Bryant P. (1996), *Children doing mathematics,* Oxford, Blackwell.

Ostad S.E. (1998), *Comorbidity between mathematics and spelling difficulties,* «Logopedics Phoniatrics Vocology», vol. 23, pp. 145-154.

Paterson S.J., Girelli L., Butterworth B. e Karmiloff-Smith A. (in preparazione), *Are numerical impairments syndrome specific? Evidence from Williams Syndrome and Down's Syndrome.*

Penner-Wilger M., Leth-Steensen C. e LeFevre J.A. (2002), *Decomposing the problem-size effect: A comparison of response time distributions across cultures,* «Memory and Cognition», vol. 30, pp. 1160-1167.

Piaget J. (1952), *The child's conception of number,* London, Routledge & Kegan Paul.

Piazza M., Mechelli A., Butterworth B. e Price C. (2002), *Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes?,* «NeuroImage», vol. 15, pp. 435-446.

Potter M.C. e Levy E.I. (1968), *Spatial enumeration without counting,* «Child Development», vol. 39, pp. 265-272.

Resnick L.B. e Ford W.W. (1981), *The psychology of mathematics for instruction,* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Rosenberg P.B. (1989), *Perceptual-motor and attentional correlates of developmental dyscalculia,* «Annals of Neurology», vol. 26, pp. 216-220.

Rourke B.P. (1993), *Arithmetic disabilities, specific and otherwise: A neuropsychological perspective,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 26, pp. 214-226.

Rovet J., Szekely C. e Hockenberry M.-N. (1994), *Specific arithmetic calculation deficits in children with Turner Syndrome,* «Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology», vol. 16, pp. 820-839.

Russell R.L. e Ginsburg, H.P. (1984), *Cognitive analysis of children's mathematical difficulties,* «Cognition and Instruction», vol. 1, pp. 217-244.

Schwartz J. (1988), *Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations.* In J. Hiebert e M. Behr (a cura di), *Number concepts and operations in the middle grades,* Hillsdale, NJ, Erlbaum.

Shalev R.S. e Gross-Tsur V. (1993), *Developmental dyscalculia and medical assessment,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 26, pp. 134-137.

Shalev R.S. e Gross-Tsur V. (2001), *Developmental dyscalculia: Review article,* «Pediatric Neurology», vol. 24, pp. 337-342.

Shalev R.S., Manor O. e Gross-Tsur V. (1997), *Neuropsychological aspects of developmental dyscalculia,* «Mathematical Cognition», vol. 3, pp. 105-120.

Shalev R.S., Manor O., Kerem B, Ayali M., Badichi N., Friedlander Y e Gross-Tsur V. (2001), *Developmental dyscalculia is a familial learning disability,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 34, pp. 59-65.

Siegel L.S. e Ryan E.B. (1989), *The development of working memory in normally achieving and subtypes of learning disabled children,* «Child Development», vol. 60, pp. 973-980.

Siegler R.S. (1988), *Strategy choice procedures and the development of multiplication skill,* «Journal of Experimental Psychology: General», vol. 117, pp. 258-275.

Siegler R.S. e Shrager J. (1984), *Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do?* In C. Sophian (a cura di), *Origins of cognitive skills,* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Simon T.J., Hespos S.J. e Rochat P. (1995), *Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn (1992),* «Cognitive Development», vol. 10, pp. 253-269.

Starkey P. e Cooper R.G. (1980), *Perception of numbers by human infants,* «Science», vol. 210, pp. 1033-1035.

Starkey P. e Gelman R. (1982), *The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic.* In T.P. Carpenter, J.M. Moser e T.A. Romberg (a cura di), *Addition and subtraction: A cognitive perspective,* Hillsdale, NJ, LEA, pp. 99-116.

Starkey P., Spelke E.S. e Gelman R. (1990), *Numerical abstraction by human infants,* «Cognition», vol. 36, pp. 97-128.

Stavy R. e Tirosh D. (2000), *How students (mis-) understand science and mathematics,* New York, Teachers College Press.

Stern E. (1992), *Spontaneous use of conceptual mathematical knowledge in elementary-school-children,* «Contemporary Educational Psychology», vol. 17, pp. 266-277.

Temple C.M. (1991), *Procedural dyscalculia and number fact dyscalculia: Double dissociation in develop mental dyscalculia,* «Cognitive Neuropsychology», vol. 8, pp. 155-176.

Temple C.M. e Carney R.A. (1993), *Intellectual functioning in children with Turner's syndrome: A comparison of behavioural phenotypes,* «Developmental Medicine and Child Neurology», vol. 35, pp. 691-698.

Temple C.M. e Marriott A.J. (1998), *Arithmetical ability and disability in Turner's Syndrome: A cognitive neuropsychological analysis,* «Developmental Neuropsychology», vol. 14, pp. 47-67.

Temple C.M. e Sherwood S. (2002*), Representation and retrieval of arithmetical facts: Developmental difficulties,* «Quarterly Journal of Experimental Psychology», vol. 55A, pp. 733-752.

Thioux M., Seron X. e Pesenti M. (1999), *Functional neuroanatomy of the semantic system: The case for numerals,* «Brain and Language», vol. 69, pp. 488-490.

Thorndike E.L. (1922), *The psychology of arithmetic,* New York, The Macmillan Co.

Van Loosbroek E. e Smitsman A.W. (1990), *Visual perception of numerosity in infancy,* «Developmental Psychology», vol. 26, pp. 916-922.

Wakeley A., Rivera S. e Langer J. (2000), *Can young infants add and subtract?,* «Child Development», vol. 71, pp. 1525-1534.

Wechsler D. (1996), *Wechsler Objective Numerical Dimensions (WOND),* London, The Psychological Corporation.

Wynn K. (1990), *Children's understanding of counting,* «Cognition», vol. 36, pp. 155-193.

Wynn K. (1992), *Addition and subtraction by human infants,* «Nature», vol. 358, pp. 749-751.

Wynn K. (2000), *Findings of addition and subtraction in infants are robust and consistent: Reply to Wakeley, Rivera, and Langer,* «Child Development», vol. 71, pp. 1535-1536.

Wynn K. (2002), *Do infants have numerical expectations or just perceptual preferences? Commentary,* «Developmental Science», vol. 5, pp. 207-209.

Wynn K., Bloom P. e Chiang W.C. (2002), *Enumeration of collective entities by 5-month-old infants,* «Cognition», vol. 83, pp. B55-B62.

Xu F. e Spelke E. (2000), *Large number discrimination in 6-month-old infants,* «Cognition», vol. 74, pp. B1-B11.