

# STRUMENTI APPLICATIVI





## La «linea del 20» e il «libro dei numeri»: due strumenti per l'apprendimento non concettuale dei numeri (seconda parte)

CAMILLO BORTOLATO

Istituto Comprensivo di Quinto (TV)

### SOMMARIO

*In questo secondo articolo vengono presentati due strumenti che rivoluzionano l'approccio didattico alla matematica in classe prima sviluppando una conoscenza diretta della serie numerica e una capacità di calcolo immediata entro il 20. Vengono approfondite le caratteristiche teorico-pratiche del metodo analogico, che è il dissolvimento della concettualità e il trasferimento del calcolo fuori dall'ambito disciplinare nella sede di origine che è quella dei meccanismi della visione interiore.*

**S**e da un lato la complessità dei processi implicati nella conoscenza numerica può scoraggiarci, dall'altro ci meraviglia la facilità con cui un gran numero di alunni raggiunge questa competenza. Infatti, quando il processo non è ostacolato da troppa intenzionalità, la conoscenza arriva loro quasi involontariamente, come un'emozione. Qual è il segreto del successo di questi bambini?

La semplice osservazione sembra suggerire che:

1. hanno successo nel calcolo i bambini che, quando calcolano, non pensano alle cifre e ai numeri scritti;
2. hanno successo nei problemi i bambini che, quando operano, non pensano alle operazioni aritmetiche.

In entrambi i casi si disinteressano del sapere disciplinare concentrandosi sull'aspetto semantico, cioè sulla visione analogica della realtà che è contemplazione interiore assecondata alle caratteristiche della mente emozionale (*subitizing*).

Il metodo analogico è l'attaccamento alla semantica vissuta come esperienza individuale, non riducibile al linguaggio verbale: si tratta di imparare da soli, senza sforzo e per un principio di spontaneità, poiché le operazioni matematiche non possono essere ricondotte a quelle della vita: è vero il contrario.

Questi bambini felici e spontanei, come già ribadito nella prima parte di questo intervento, pensano di avere gli strumenti per capire tutto. Vivono la comprensione senza ricavarla da un processo di ragionamento. «Vedono». Immaginando il sapere matematico come una montagna da scalare, non si fanno distrarre dal fascino dei numeri scritti (né dal loro timore), non fanno cose diverse dalle solite, ma rimangono fedeli al loro punto di vista, che è quello delle operazioni consuete della vita. Hanno fiducia nel loro strumento epistemologico preferenziale, che è il riscontro analogico, il quale permette loro di «inquadrare» il mondo in pochissimo tempo.

Prendendo a prestito l'immagine della montagna, possiamo concepire il processo di apprendimento come un percorso in ascesa. Ogni bambino è ai suoi piedi, come l'umanità stessa al suo inizio, per compiere lo stesso faticoso processo evolutivo verso la concettualità, solo come meta finale. C'è una via obbligata che bisogna imboccare perché tutto si svolga nella maniera più facile e naturale, ed è una via che parte dal basso dove ci sono le cose, non come le vediamo, ma come le disponiamo «ordinatamente» dentro di noi: l'aspetto semantico (la semantica è un'esperienza interiore). Successivamente acquisiamo le parole per denominare le quantità (l'aspetto lessicale) e ciò è già sufficiente per calcolare, come ben sanno i bambini che prima della scuola sviluppano una forte propensione per il calcolo a mente senza aver mai aperto un quaderno e senza aver imparato da nessuno.<sup>1</sup>

Vedono sulla sommità della montagna il tempio dei numeri scritti (ambito sintattico) dove c'è l'insegnante che li aspetta impaziente. Non ci devono far caso. Intuiscono che custodisce un sapere importante, ma, paghi di quello che sanno, conservano l'attenzione orientata sulla visione semantica e sul lessico latino con i quali si sentono bravi e completi.

Non sempre tuttavia il compito è facile. Proseguendo la salita incontrano operazioni che sono troppo complesse per essere gestite nella propria mente e allora si arrendono. Ecco che l'insegnante scende in loro soccorso e il suo aiuto è ben accetto: per riuscire ad eseguire quel calcolo devono infatti accedere al livello superiore della montagna, seguendo l'insegnante, e perciò devono accettare di diventare allievi, discenti, rinunciando alla loro «genialità» e indipendenza. Nel «tempio dei numeri scritti», seguendo delle procedure che sono come un gioco, il calcolo viene scomposto in tanti più piccoli e perseguito gradualmente. Alla fine, se l'alunno ha agito in modo corretto, se ha incolonnato bene e non ha dimenticato il riporto, troverà il risultato finale senza fare tanta fatica. Alla fine gli apparirà con sollievo che *il calcolo scritto è calcolo mentale segmentato* (in pratica si fanno sempre le stesse cose...).

La meraviglia di questo procedimento è che toglie la fatica di pensare e memorizzare contemporaneamente. L'alunno può distogliere l'attenzione dalla visione interiore e rilassarsi seguendo delle procedure che altri hanno inventato per lui, senza dover fare tutto da solo. Perde la libertà ma acquista molto potere e può risolvere come uno scherzo calcoli che una volta erano riservati a pochi sapienti.

## Cos'è la scrittura

Noi insegnanti sappiamo che questo tempio delle procedure ha una storia recente ed è stato introdotto nel tardo Medioevo per rispondere alle richieste di un'economia mercantile in espansione.<sup>2</sup> C'era bisogno di potenziare il calcolo scritto procedurale e a questo scopo era necessario cambiare la scrittura, anche sacrificando il riferimento diretto alle cose. Dopotutto, la scrittura in sé non è altro che una protesi costituita di carta e inchiostro per compensare i limiti della nostra memoria di lavoro: con l'inchiostro si può estendere la computazione al di fuori dello spazio dell'istantaneità, che è di tre secondi.

Tuttavia, se da un lato la scrittura permette di risolvere calcoli complessi ed è estremamente utile e potente, dall'altro è anche artificiale e ostica alla comprensione. Essa implica infatti degli elementi — come il cambio, il valore posizionale e lo zero — che obbligano a una rinuncia radicale al riferimento visivo.

Non serve tuttavia che l'alunno la comprenda del tutto, perché la sua funzionalità è strumentale al calcolo scritto, nel quale si perde il controllo di quello che si sta facendo fino alla lettura del risultato finale. In pratica, nella sua testa l'alunno non farà mai un cambio né visualizzerà uno zero. Il numero «decem» continuerà a esistere nella sua mente nella sua esatta posizione a coronamento della decina e l'alunno utilizzerà ancora il lessico integrale latino, che fungerà da guida nella trascodificazione dal significato al simbolo e viceversa.

Il calcolo mentale continuerà a essere quello di sempre. L'alunno, anche quando eseguirà il calcolo scritto, continuerà a pensare alla vecchia maniera, senza prendere in considerazione la nuova composizione di cifre, compreso lo zero. Il numero 1000 sarà ancora M come nell'immaginario precedente e l'alunno elaborerà le cifre colonna per colonna come se si trattasse sempre di unità dello stesso valore.

Questa scrittura, che è l'alterazione sistematica della decimalità, che frana a ogni riempimento di decina, non deve essere presa troppo sul serio. Non era certamente nelle intenzioni dei suoi inventori cambiare l'ordine semantico di ciò che succede nella mente delle persone. La scrittura è scrittura.

Di fatto anche noi adulti utilizziamo strumentalmente questi codici numerici incollandoli come etichette sul vecchio ordine decimale integro. Non è cambiato niente. Al momento dell'introduzione di questa scrittura a nove cifre, la negazione del simbolo «decem», quello più significativo, era stata vissuta come una decurtazione. Sembrava alla gente di allora, abituata alla scrittura ingenua latina, che un dito fosse stato tolto di mezzo rendendo inservibili le mani. Per questo c'erano voluti secoli affinché la nuova codificazione venisse accettata ed essa era stata vissuta — comprensibilmente — come una perdita. È una perdita che ancora oggi stentiamo ad accettare quando a scuola nel calcolo scritto introduciamo i simboli *u*, *da*, *h* e *k* per il timore di perdere il riferimento alla visione.

*Dimenticare la scrittura*

Sul potere e sull'insondabilità della scrittura si concentra purtroppo l'attenzione di molti insegnanti, che da tempo hanno smesso di insegnare il calcolo ai piedi della montagna per spiegare invece i segreti della scrittura, seduti nel tempio a grande distanza culturale dagli alunni. Agisce come una sorta di strabismo a favore dei numeri scritti, dettato dalla suggestione e dal bisogno di controllo di ciò che ci sfugge. Inoltre, *si preferisce indirizzare l'attenzione verso ciò che è esterno (la scrittura) piuttosto che verso ciò che accade dentro di noi contigualmente con le emozioni (il calcolo mentale).*

Voler ricavare la semantica dalla scrittura è come cercare di trasformare il pane già cotto in farina e acqua. Ci si perde, come succede quasi di regola nelle nostre aule, in una verbalizzazione senza fine sul «concetto di decina» e sul sistema decimale della scrittura, che invece è lo stravolgimento sistematico della decimalità. Occorre piuttosto insegnare le cose in modo semplice e diretto, riconoscendo soprattutto la differenza tra il tempio freddo della disciplina, dove si analizzano le asserzioni compiute quando il problema del calcolo è già superato, e il nostro mondo interiore, in cui elaboriamo le quantità in modo istintivo e personale. Questo perché se è vero che, come abbiamo detto, il calcolo mentale è indifferente e indipendente dalle condizioni esterne e quindi anche dalla scrittura, è anche vero che alla disciplina è indifferente come si svolge il calcolo nella nostra mente.

**Il libro dei numeri**

Con queste premesse, cioè con il proposito di lasciare da parte il segreto della scrittura, possiamo affrontare i numeri anche fino al 10.000. Del resto, l'impegno cognitivo richiesto è esiguo rispetto alle sofisticate competenze impiegate dalla lingua. Non occorre spiegare cosa sia il 100 dal punto di vista disciplinare (un polinomio, cioè una decina di decine), ma è sufficiente indicare che è come una stanza con dieci armadi, ciascuno provvisto di dieci ripiani (si veda la figura 1).<sup>3</sup> Lo strumento che chiamiamo «libro dei numeri» è semplicemente la presentazione nuda e cruda di queste dieci stanze. Facciamole vedere subito agli alunni. È una scelta coraggiosa, dal punto di vista dell'insegnante, che i bambini comprendono subito. Cosa c'è di più semplice e dovuto da parte nostra che mostrare quello che sarà l'oggetto del loro studio? Reagiscono con stupore riconoscendo una metafora del mondo nella sua infinita specularità. *I numeri sono fatti così, tantissimi e bellissimi, come tanti punti ordinati nello spazio.*

Abituati all'astrazione, siamo convinti che l'attenzione degli alunni si rivolga ai codici numerici da interpretare, e invece è proprio il dato di bellezza formale che li coinvolge, poiché ogni riconoscimento di simmetrie si traduce in un risparmio di energia nella successiva lettura. L'analogia permette, studiando il piccolo, di capire il tutto.

Nelle pagine del libro dei numeri tutto è ordinato ed essenziale. Osservando la prima riga già si coglie l'idea organizzativa generale: dieci ripiani, dieci armadi, dieci stanze, sempre dieci, come le dita delle mani. Se so contare fino a 10 posso contare fino all'infinito.

### *Comprendere la ricorsività dei numeri*

Ora, mettendo il dito in alto a sinistra, l'alunno prova a contare e... scopre subito che i numeri si leggono proprio come un libro, tornando a capo a ogni fine riga. Ora prova a contare per cento. Mette il dito sul 100 e sul 200 e così via, lasciandosi guidare dalla sequenza verbale quasi immutata. Alla fine guardando le cifre constata che il 1000 ha tre zeri, uno più del cento: ne prende atto.

Mentre esegue queste attività non lo sfiora alcun dubbio sul significato di quello che sta facendo (dal punto di vista semantico, la didattica concettuale è condannata a interrogarsi incessantemente sul significato di quello che produce). Non occorre comprendere il concetto di «unità», «decine» e «centinaia», perché l'alunno li coglie direttamente, con gli occhi. La strutturazione delle quantità, che nella didattica convenzionale è il punto di arrivo, nel metodo analogico è il punto di partenza dato per scontato.

E in questa attività non c'è astrazione, ma al contrario una definizione sempre più nitida della visione. Infatti, se voglio cercare un numero sulle varie tabelle, compio la stessa operazione, in chiave figurata, di andare a prendere un oggetto che mi serve in una stanza, dentro un determinato armadio dove so di averlo messo. Seguo un semplice criterio di selezione di comandi, determinato, nel caso dei numeri, dall'ordine in cui si presentano le cifre.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 1 Rappresentazione del 100.

### *Quando usare lo strumento*

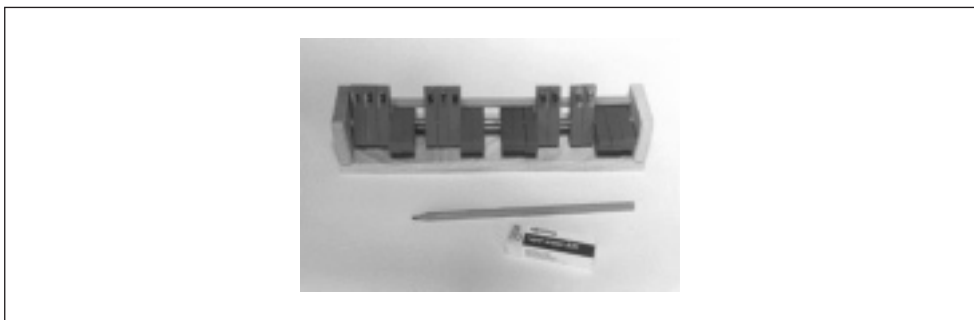
Imparare tutti i numeri fino al 10.000 sapendoli anche ritrovare sulla tabella è un obiettivo alla portata di tutti i bambini, anche in età prescolare, sempre che le condizioni di attenzione lo permettano. Tuttavia, il suo utilizzo è raccomandato in classe prima, perché è un'operazione facilissima e divertente, da non confondere con il calcolo. Bisogna avere chiara questa distinzione tra numeri e calcolo. Conoscere i numeri significa acquisire la sequenza statica dei codici verbali e scritti nella quale le varie etichette, per esempio il dodici o il mille, sono sempre al loro posto. È come avere un telecomando con mille canali.

Nel calcolo invece assistiamo a un continuo trasferimento di queste etichette sui tasti fissi del telecomando. Durante una sola operazione avremo una numerazione di partenza, una temporanea e una di arrivo. Il calcolo stravolge continuamente l'ordinalità canonica a seconda del verso di numerazione. I bambini legati a una fissità procedurale si smarriscono perché non comprendono il senso di questo cambiamento. A questo scopo abbiamo bisogno di uno strumento che rappresenti con il movimento la complessa dinamica di quello che avviene in un calcolo. Questo strumento si chiama «linea del 20».

### **La linea del 20**

La linea del 20 è un piccolo congegno in grado di sviluppare la meccanica del calcolo con la stessa procedura delle mani e nei tempi esatti delle nostre reazioni mentali. È composto di tasti mobili come le dita, suddivisi in cinque.<sup>4</sup>

È grazie alle mani che è stato possibile sviluppare anche neurologicamente il computo mentale e ad esse ricorriamo volentieri quando siamo in difficoltà. Sono in effetti un dono straordinario della natura, equiparabile a un computer, poiché grazie alla



*Fig. 2* Lo strumento «linea del 20».



doppia posizione di ciascun dito (aperto/chiuso, on/off) ci permettono infinite combinazioni. A differenza di un calcolatore, tuttavia, non ci forniscono direttamente i risultati, ma le immagini adattate al computo intuitivo. Queste immagini fungono da interfaccia in un colloquio fitto tra lo strumento e la nostra mente, che si influenzano vicendevolmente.

La mente pensa il numero 7 e lo strumento lo compone sulla linea dei numeri. Qui gli occhi constatano che non c'è più il numero sette, ma cinque e due, oppure due e cinque, oppure tre e quattro e così via. Lo strumento ha trasformato l'idea di quantità che avevamo in mente, «immagine concettualizzata», in «immagine analogica» adeguata per la percezione d'intuito cioè per il rilevamento istantaneo (subitizing).<sup>5</sup> Di nuovo la mente suggerisce la seconda entità concettuale da aggiungere o togliere e lo strumento la assembla accanto alla prima, in modo che gli occhi possano recepire l'immagine finale.

Durante ogni calcolo effettuiamo un lavoro di composizione e scomposizione di queste immagini sulla linea dei numeri rappresentata con gli spazi intermedi tra le cinque e le decine. La computazione degli occhi è velocissima e sfugge al controllo del ragionamento e della logica (non c'è nessuna logica nel fatto che tra il cinque e il sei ci sia più spazio che tra il sei e il sette). Vengono coinvolte naturalmente anche le operazioni di *topologia* che si fanno a scuola (alto/basso, destra/sinistra, avanti/indietro), senza bisogno di perderci tempo a esercitarle.

Operazioni topologiche ben più importanti coinvolte nel calcolo riguardano la corrispondenza, la traslazione e il ribaltamento delle quantità come immagini durante il loro continuo scorrimento sulla linea dei numeri.

Leggiamo ciascuna — dal centro, da sinistra o da destra, a seconda di come è più opportuno e rapido — sapendo che tutto ciò che facciamo ora con comodo lo dovremo fare, successivamente, in assenza dello strumento, nel nostro schermo neurale dove tutto si dissolve dopo tre secondi.

Una vantaggio considerevole dell'uso di questo strumento è che la numerazione temporanea avviene a tasti abbassati, cioè senza che l'alunno veda le cifre. Per esempio, nell'operazione  $5 + 7 =$ , alzo cinque tasti in un solo colpo e vedo le cifre (numerazione di partenza). Proseguo contando fino a 7 sui tasti abbassati (numerazione temporanea) e infine li alzo scoprendo che sono arrivato al 12 (numerazione finale). In questo modo, lo strumento impedisce che, nella seconda fase, la numerazione temporanea si sovrapponga a quella di partenza, e questo è un aspetto di grande utilità per i bambini con fissità procedurale.

### *Tre fasi*

Didatticamente possiamo identificare tre momenti di apprendimento e di progressiva riduzione del ricorso allo strumento (fading).

Nella *prima fase* gli alunni utilizzano lo strumento come «contatore» per eseguire da subito addizioni e sottrazioni con il meccanismo del conteggio tasto per tasto. Quando cominciano a utilizzare i tasti «a piene mani», cioè alzandone sette, nove o quindici in un sol colpo, significa che stanno interiorizzando i meccanismi del calcolo intuitivo, che è — come abbiamo detto — il superamento del conteggio.

Nella *seconda fase* gli alunni operano avendo sempre davanti a sé lo strumento, ma senza bisogno di toccarlo, orientandosi solo con gli occhi.

Nella *terza fase* operano senza vedere lo strumento. Significa che il riferimento si è consolidato e stabilizzato nella loro mente: questo è lo scopo dell'apprendimento.

### *Quando cominciare*

Con i regoli colorati, l'alunno era costretto a costruire la dinamica del calcolo come se dovesse montarsi l'auto da sé per partire. Per farlo utilizzava pezzi di tutte le dimensioni ma del tutto privi dell'aspetto ordinale.<sup>6</sup> Diversamente, con la linea del 20 è pronto per viaggiare subito e, strada facendo, imparerà a conoscere come è fatta la sua auto. Gradualità significa partire dal tutto definito sempre più chiaramente. Nella vita apprendiamo ogni cosa in questa maniera, cioè partendo dall'idea globale; in un certo senso, impariamo partendo dalla fine.

Il suggerimento è quindi quello di iniziare subito:

- perché i bambini lo vogliono;
- perché la pratica viene prima della teoria;
- perché poi si ha il tempo di riflettere su quello che è già stato fatto;
- perché, potendo disporre di risorse limitate in termini di attenzione, si deve fare solo l'essenziale.

### **Decalogo del metodo analogico**

In sintesi, il metodo analogico è *il dissolvimento della concettualità nell'ambito del calcolo, che coincide con il suo trasferimento fuori dell'area disciplinare e il riconoscimento che la sua origine è nei meccanismi della visione interiore*. I cambiamenti che comporta nel nostro modo di atteggiarsi possono essere i seguenti:

- limitare il ricorso al linguaggio verbale;
- credere al silenzio come strumento per sviluppare l'intuizione;
- presentare i fatti e non le connessioni;
- privilegiare le simulazioni alle spiegazioni;
- preferire le immagini interne alle immagini esterne;
- avvertire la conoscenza come un'emozione;

- credere che ognuno ha in sé tutto ciò che gli serve per capire;
- avere fiducia nella mente che lavora da sola;
- concepire la conoscenza come un allargamento della percezione interiore, come un dono.

Il libro dei numeri e la linea del 20 rappresentano la via di ritorno dalla concettualità e il recupero della semplicità e della naturalezza dei bambini.

### Bibliografia

- <sup>1</sup> Butterworth B. (1999), *Intelligenza matematica*, Milano, Rizzoli.
  - <sup>2</sup> Seife C. (2002), *Zero: La storia di un'idea pericolosa*, Torino, Bollati Boringhieri.
  - <sup>3</sup> Bortolato C. (2002), *Calcolare a mente*, Trento, Erickson.
  - <sup>4</sup> Bortolato C. (2000), *La linea dei numeri*, Trento, Erickson.
  - <sup>5</sup> Lucangeli D. (1999), *Il farsi e il disfarsi del numero*, Roma, Borla.
  - <sup>6</sup> Baroody A.J. (1994), *Un nuovo tipo di regoli per l'apprendimento dei concetti numerici*, «Insegnare all'Handicappato», vol 8, n. 2, pp. 155-162.
- Bortolato C. (2004), *La linea dei numeri*, CD ROM, Trento, Erickson.
- Campiglio A. e Eugeni V. (1990), *Dalle dita al calcolatore*, Milano, Bompiani.
- Dehaene S. (2000), *Il pallino della matematica*, Milano, Mondadori.
- Si veda inoltre il sito [www.camillobortolato.it](http://www.camillobortolato.it).

